Pauta de corrección Control 3

P1. a) Calcule las siguientes integrales

i) **(1,0 pto.)** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{x\cos(x^2)}{2+\operatorname{sen}^2(x^2)}\,\mathrm{d}x$

Solución

Primera forma (Haciendo la sustitución directamente)

Consideramos el cambio de variable

$$u = \operatorname{sen}(x^2), \qquad \mathrm{d}u = 2x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x.$$

Más aún, notamos que

$$\begin{aligned} \text{si } x = 0 &\implies u = 0,\\ \text{si } x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} &\implies u = 1. \end{aligned}$$

(0,2 pts. por mencionar el cambio de variable)

Luego,

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{x\cos(x^2)}{2+\operatorname{sen}^2(x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

(0,3 pts. por realizar la sustitución de manera correcta)

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^1.$$

(0,3 pts. por realizar la integración de manera correcta)

Finalmente,

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{x\cos(x^2)}{2+\operatorname{sen}^2(x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \arctan(0)}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

(0,2 pts. por entregar el resultado)

Segunda forma (Encontrando una primitiva primero)

También podemos primero encontrar una primitiva de la función $\dfrac{x\cos(x^2)}{2+\operatorname{sen}^2(x^2)}$. En este caso, considerando el cambio de variable

$$u = \operatorname{sen}(x^2), \qquad \mathrm{d}u = 2x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x,$$

(0,2 pts. por mencionar el cambio de variable)

vamos a tener que

$$\int \frac{x\cos(x^2)}{2+\operatorname{sen}^2(x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

(0,3 pts. por realizar la sustitución de manera correcta)

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

(0,3 pts. por realizar la integración de manera correcta)

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{x\cos(x^2)}{2+\operatorname{sen}(x^2)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\arctan\left(\frac{\operatorname{sen}(\pi/2)}{\sqrt{2}}\right) - \arctan\left(\frac{\operatorname{sen}(0)}{\sqrt{2}}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

(0,2 pts. por evaluar y entregar el resultado)

ii) **(2,0 pts.)** $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{1}{3+5\cos(x)}\,\mathrm{d}x$

Solución

Comenzamos usando el cambio de variable $t = \tan(x/2)$, de donde

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(0,4 pts. por mencionar el cambio de variable)

Más aún, notamos que

$$\text{si } x = 0 \implies t = 0,$$
$$\text{si } x = \frac{\pi}{3} \implies t = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(0,4 pts. por calcular los nuevos límites de integración)

Luego,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3} \frac{1}{3+5\cos(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{3+5\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\left(\frac{2}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{4-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(\frac{1}{2+t} + \frac{1}{2-t}\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

(0,3 pts. por realizar la sustitución de manera correcta)

$$= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

(0,7 pts. por realizar la integración de manera correcta)

Por lo cual,

$$\int_0^{\pi/3} \frac{1}{3+5\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{6+\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}\right).$$

(0,2 pts. por entregar el resultado)

Alternativa

También podemos encontrar primero la primitiva de $\dfrac{1}{3+5\cos(x)}$ siguiendo esencialmente los mismos pasos que antes. En este caso,

$$\int \frac{1}{3+5\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\tan(x/2)}{2-\tan(x/2)}\right| + C.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{\pi/3} \frac{1}{3+5\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\tan(x/2)}{2-\tan(x/2)}\right|\Bigg|_0^{\pi/3} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{6+\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}\right).$$

b) **(3,0 pts.)** Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Muestre que

$$\int_0^{\pi} x f(\operatorname{sen}(x))\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen}(x))\,\mathrm{d}x.$$

<u>Indicación:</u> Use un cambio de variables $t = \pi - x$ en las integrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(\operatorname{sen}(x))\,\mathrm{d}x$ y $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen}(x))\,\mathrm{d}x$ junto con la aditividad horizontal de la integral. Recuerde además que $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución

La continuidad de f, además de la derivabilidad y continuidad de la derivada de $\pi - t$, permiten usar la integración por cambio de variable.

(0,1 pts. por justificar las hipótesis del teorema del cambio de variable)

Siguiendo la indicación con el cambio de variables $t = \pi - x$ en $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(\operatorname{sen}(x))\,\mathrm{d}x$ tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(\operatorname{sen}(x))\,\mathrm{d}x &= -\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (\pi - t) f(\operatorname{sen}(\pi - t))\,\mathrm{d}t = -\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \pi f(\operatorname{sen}(\pi - t))\,\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} t f(\operatorname{sen}(\pi - t))\,\mathrm{d}t \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\operatorname{sen}(t))\,\mathrm{d}t - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t f(\operatorname{sen}(t))\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

(1,0 pto. por realizar la integración de manera correcta)

Con lo cual, por la aditividad horizontal, concluimos que

$$\int_0^{\pi} x f(\operatorname{sen}(x))\,\mathrm{d}x = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\operatorname{sen}(t))\,\mathrm{d}t.$$

(0,5 pts. por establecer dicha igualdad)

Por otro lado, usando el cambio de variables $t = \pi - x$ en $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen}(x))\,\mathrm{d}x$ obtenemos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen}(x))\,\mathrm{d}x = -\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen}(t - \pi))\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\operatorname{sen}(t))\,\mathrm{d}t.$$

(1,0 pto. por realizar la integración de manera correcta)

Combinando ambos resultados, se obtiene la igualdad deseada, es decir,

$$\int_0^{\pi} x f(\operatorname{sen}(x))\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen}(x))\,\mathrm{d}x. \qquad \textbf{(0,4 pts. por concluir la igualdad de manera correcta)}$$

P2. a) **(3,0 pts.)** Considere la función $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\int_0^{\int_0^x e^{-s^2}ds} \operatorname{sen}(y^2)\,\mathrm{d}y\right).$$

Calcule $f'(x)$ y muestre que

$$f'(x) = \cos\left(\int_0^{\int_0^x e^{-s^2}ds} \operatorname{sen}(y^2)\,\mathrm{d}y\right) \operatorname{sen}\left(\left(\int_0^x e^{-s^2}\,\mathrm{d}s\right)^2\right) e^{-x^2} \text{ para todo } x > 0.$$

<u>Indicación:</u> Puede usar sin demostración que $\left(\int_{u(x)}^{v(x)} h(t)\,\mathrm{d}t\right)' = h(v(x))v'(x) - h(u(x))u'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, toda función continua h, y todas funciones derivables u, v.

Solución

Usando regla de la cadena, tenemos

$$f'(x) = \cos\left(\int_0^{\int_0^x e^{-s^2}ds} \operatorname{sen}(y^2)\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_0^{\int_0^x e^{-s^2}ds} \operatorname{sen}(y^2)\,\mathrm{d}y\right)'$$

(0,9 pts. por utilizar regla de la cadena de manera correcta)

$$= \cos\left(\int_0^{\int_0^x e^{-s^2}ds} \operatorname{sen}(y^2)\,\mathrm{d}y\right) \operatorname{sen}\left(\left(\int_0^x e^{-s^2}\,\mathrm{d}s\right)^2\right)\left(\int_0^x e^{-s^2}\,\mathrm{d}s\right)'$$

(0,9 pts. por utilizar el teorema fundamental del cálculo de manera correcta)

$$= \cos\left(\int_0^{\int_0^x e^{-s^2}ds} \operatorname{sen}(y^2)\,\mathrm{d}y\right) \operatorname{sen}\left(\left(\int_0^x e^{-s^2}\,\mathrm{d}s\right)^2\right) e^{-x^2},$$

(0,9 pts. por utilizar el teorema fundamental del cálculo de manera correcta)

donde se usó la indicación ya que la función $\operatorname{sen}(y^2)$ es continua; la función $\int_0^x e^{-s^2}\,\mathrm{d}s$ es derivable porque e^{-s^2} es continua y por el teorema fundamental del cálculo; y la función constante igual a 0 también es derivable.
(0,3 pts. por justificar las hipótesis de la indicación)

b) **(3,0 pts.)** Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Considere F y G funciones definidas por

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ y } G(x) = \int_0^x f(t^2)\,\mathrm{d}t.$$

Demuestre que, para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^a G(x)\,\mathrm{d}x = aG(a) - \frac{1}{2}F(a^2).$$

<u>Indicación:</u> Puede ser útil estudiar la derivada de $H(a) = \displaystyle\int_0^a G(x)\,\mathrm{d}x - aG(a) + \frac{1}{2}F(a^2)$, y recordar que las únicas funciones derivables con derivada nula son las funciones constantes.

Solución

Primera forma (siguiendo la indicación)

Primero, por el teorema fundamental del cálculo, se tiene que tanto F con G son derivables. En efecto, como f es continua por hipótesis, $f(t^2)$ también lo es al ser la composición de f y un polinomio. Nuevamente por el teorema fundamental del cálculo, $\int_0^a G(x)\,\mathrm{d}x$ es derivable ya que G es continua (por ser derivable). Concluimos que H también es derivable, pues se escribe como álgebra y composición de $\int_0^a G(x)\,\mathrm{d}x$, F, G y otros polinomios.

(0,3 pts. por justificar las hipótesis del teorema fundamental del cálculo)

Además, también por el teorema fundamental del cálculo, tenemos que

$$F'(x) = f(x), \qquad G'(x) = f(x^2), \qquad \left(\int_0^a G(x)\,\mathrm{d}x\right)' = G(a).$$

($0{,}4 \times 3 = 1{,}2$ pts. por calcular correctamente las derivadas de F, G y $\int_0^a G(x)\,\mathrm{d}x$)

Calculamos ahora la derivada de H. Se tiene que

$$H'(a) = G(a) - G(a) - aG'(a) + F'(a^2)a$$

(0,3 pts. por utilizar correctamente la regla del producto y la regla de la cadena)

$$= -af(a^2) + f(a^2)a = 0.$$

(0,2 pts. por obtener que $H'(a) = 0$)

Como $H'(a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$, se obtiene que $H(a) = c$ para algún $c \in \mathbb{R}$.

(0,5 pts. por concluir que H es constante)

Más aún evaluando $H(0) = 0$, por lo cual $H(a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$, lo que muestra la igualdad deseada.

(0,5 pts. por concluir que H es igual a cero)

Segunda forma (integrando por partes)

Para la integral $\int_0^a G(x)\,\mathrm{d}x$, procedemos mediante integración por partes con

$$\begin{aligned} u &= G(x), & \mathrm{d}v &= \mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u &= G'(x)\,\mathrm{d}x, & v &= x. \end{aligned}$$

(0,7 pts. por aplicar integración por partes)

Así pues,

$$\int_0^a G(x)\,\mathrm{d}x = xG(x)\Big|_0^a - \int_0^a xG'(x)\,\mathrm{d}x$$ **(0,5 pts. por realizar integración por partes)**

$$= aG(a) - \int_0^a xf(x^2)\,\mathrm{d}x,$$ **(0,3 pts. por establecer esta igualdad)**

donde en la última igualdad hemos usado que

1º) $xG(x)\Big|_0^a = aG(a)$.

(0,1 pts. por justificar el primer término de la igualdad)

2º) G es derivable y $G'(x) = f(x^2)$ por el teorema fundamental del cálculo.

(0,2 pts. por justificar el segundo término de la igualdad)

Ahora, para la integral $\int_0^a xf(x^2)\,\mathrm{d}x$, consideramos el cambio de variable

$$t = x^2, \qquad \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x.$$

(0,2 pts. por mencionar el cambio de variable)

Más aún, notamos que

$$\begin{aligned} &\text{si } x = 0 \implies t = 0, \\ &\text{si } x = a \implies t = a^2. \end{aligned}$$

(0,3 pts. por realizar el cambio de los límites de integración de manera correcta)

Luego,

$$\int_0^a xf(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

(0,3 pts. por realizar la sustitución e integrar de manera correcta)

$$= \frac{1}{2}F(a^2).$$ **(0,2 pts. por aplicar la definición de $\boldsymbol{F}$)**

Por lo tanto,

$$\int_0^a G(x)\,\mathrm{d}x = aG(a) - \frac{1}{2}F(a^2).$$

(0,2 pts. por concluir)

P3. a) **(1,5 pts.)** Considere la región $\mathcal{R}$ en el primer cuadrante, acotada por la izquierda por el eje vertical, por abajo por la curva $x = 2\sqrt{y}$, arriba a la izquierda por la curva $x = (y-1)^2$ (con $y \geq 1$), y arriba a la derecha por $x = 3 - y$ (vea la Figura 1). Calcule el área de la región $\mathcal{R}$.
Indicación: Calcule explícitamente los puntos (x, y) de intersección de las curvas para explicar su planteamiento mediante integrales.

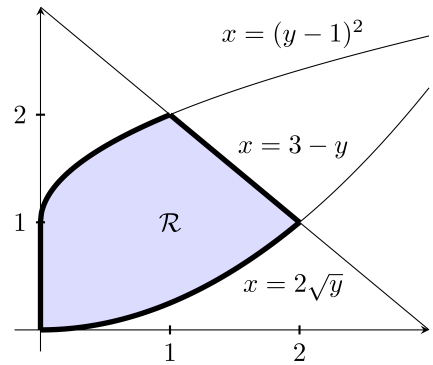


Figura 1: Esquema de la región $\mathcal{R}$.

Solución

Para calcular el área, comenzamos encontrando las intersecciones entre las curvas. Se busca primero $y \geq 1$ tal que

$$(y-1)^2 = 3 - y \iff y^2 - 2y + 1 = 3 - y \iff y^2 - y - 2 = 0.$$

(0,1 pts. por plantear las ecuaciones)

Usando la fórmula cuadrática, resulta que $y \in \left\{ \frac{1-\sqrt{9}}{2}, \frac{1+\sqrt{9}}{2} \right\}$, de donde $y \in \{-1, 2\}$ y obtenemos que $y = 2$ porque buscamos una solución con $y \geq 1$. Así, el punto de intersección de las dos curvas es $(x, y) = (1, 2)$.

(0,1 pts. por encontrar el punto de intersección)

Ahora, buscamos $y \geq 0$ tal que

$$3 - y = 2\sqrt{y} \implies (3-y)^2 = 4y \iff 9 - 6y + y^2 = 4y \iff y^2 - 10y + 9 = 0,$$

(0,1 pts. por encontrar el punto de intersección)

donde suponemos adicionalmente que $y \leq 3$ para que el término $3 - y$ sea no negativo (en otro caso, no puede ser igual a $2\sqrt{y}$, que es no negativo).

Nuevamente usamos la fórmula cuadrática, resultando que $y \in \left\{ \frac{10-\sqrt{64}}{2}, \frac{10+\sqrt{64}}{2} \right\}$, de donde resulta que $y \in \{1, 9\}$. En este caso, descartamos la solución $y = 9$ obteniendo que $y = 1$. Así, el punto de intersección de las dos curvas es $(x, y) = (2, 1)$.

(0,1 pts. por encontrar el punto de intersección)

También se puede despejar y antes de encontrar las intersecciones, para encontrarlas en función de x.

Para encontrar el área, se puede integrar respecto a "x" o respecto a "y".

Primera forma (integrando con respecto a x)

Para integrar con respecto a x, despejamos usando que $x, y \geq 0$.
Primero, la curva $x = (y-1)^2$ nos da como solución que $\sqrt{x} = |y-1|$. Como solo estamos considerando la rama superior (con $y \geq 1$), obtenemos que $\sqrt{x} = y - 1$, de donde $y = \sqrt{x} + 1$. Después, la curva $x = 3 - y$ nos da inmediatamente que $y = 3 - x$. Finalmente, la curva $x = 2\sqrt{y}$ es equivalente a $y = \dfrac{x^2}{4}$.
Además, la curva $y = \sqrt{x}+1$ va por encima de la curva $y = \dfrac{x^2}{4}$ para $x \in [0,1]$, y luego la curva $y = 3-x$ va por encima de la curva $y = \dfrac{x^2}{4}$ para $x \in [1,2]$ (como se ve en la figura). Así, el área de $\mathcal{R}$ es:

$$\int_0^1 \left((\sqrt{x}+1) - \left(\frac{x^2}{4}\right) \right) \mathrm{d}x + \int_1^2 \left((3-x) - \left(\frac{x^2}{4}\right) \right) \mathrm{d}x$$

(0,6 pts. por plantear las integrales)

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} + x - \frac{x^3}{12}\right]\Bigg|_0^1 + \left[3x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right]\Bigg|_1^2$$

(0,4 pts. = 2 × 0,2 pts. por encontrar las primitivas)

$$= \left(\frac{2}{3} + 1 - \frac{1}{12}\right) + \left(6 - 2 - \frac{2}{3}\right) - \left(3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\right) = \frac{5}{2}.$$

(0,1 pts. por evaluar y encontrar el área)

Alternativa

Para calcular el área bajo $y = 3 - x$ con $x \in [1,2]$, también se puede usar la fórmula del área de un trapecio, o escribirla como resta de áreas de dos triángulos y usar la fórmula del área de un triángulo.

Segunda forma (integrando con respecto a y)

Para integrar con respecto a y, no es necesario despejar antes. Como la curva $x = 2\sqrt{y}$ está a la derecha de la curva $x = 0$ para $y \in [0,1]$, y la curva $x = 3 - y$ está a la derecha de la curva $x = (y-1)^2$ para $y \in [1,2]$, resulta que el área de $\mathcal{R}$ es:

$$\int_0^1 (2\sqrt{y} - 0)\,\mathrm{d}y + \int_1^2 ((3-y) - (y-1)^2)\,\mathrm{d}y$$

(0,6 pts. por plantear las integrales)

$$= \int_0^1 2\sqrt{y}\,\mathrm{d}y + \int_1^2 (2 + y - y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$= \left[\frac{4}{3}y^{3/2}\right]\Bigg|_0^1 + \left[2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_1^2$$

(0,4 pts. = 2 × 0,2 pts. por encontrar las primitivas)

$$= \left(\frac{4}{3}\right) + \left(4 + 2 - \frac{8}{3}\right) - \left(2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{2}.$$

(0,1 pts. por evaluar y encontrar el área)

Alternativa

Para calcular el área a la izquierda $x = 3 - y$ con $y \in [1,2]$, también se puede usar la fórmula del área de un trapecio, o escribirla como resta de áreas de dos triángulos y usar la fórmula del área de un triángulo.

b) **(1,5 pts.)** Considere las funciones $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ y $g\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 2\sqrt{4-x}$ y $g(x) = x - 1$. Sea $\mathcal{R}$ la región del primer cuadrante encerrada bajo ambas funciones, es decir:

$$\mathcal{R} = \Big\{ (x,y) \ \mid \ x \in [1,4],\ 0 \leq y \leq \min\{f(x), g(x)\} \Big\},$$

como muestra la Figura 2. Calcule el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje horizontal.
Indicación: Calcule explícitamente los puntos de intersección (x,y) de las curvas para explicar su planteamiento mediante integrales.

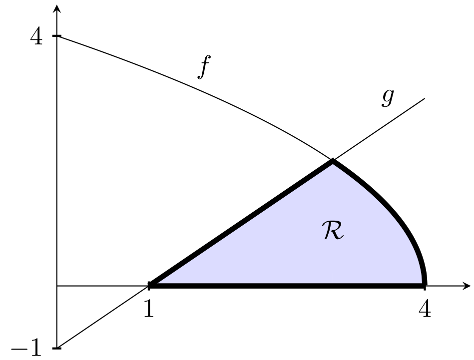


Figura 2: Esquema de la región $\mathcal{R}$.

Solución

Para calcular el volumen, se comienza encontrando el punto de intersección entre las dos curvas. Se busca de este modo $x \in [0,4]$ tal que $f(x) = g(x)$, de donde se obtiene $2\sqrt{4-x} = x - 1$. Elevando al cuadrado, resulta

$$4(4-x) = (x-1)^2 \iff 16 - 4x = x^2 - 2x + 1 \iff x^2 + 2x - 15 = 0.$$

(0,1 pts. por plantear las ecuaciones)

Usando la fórmula cuadrática, se obtiene que $x \in \left\{\dfrac{-2-\sqrt{64}}{2}, \dfrac{-2+\sqrt{64}}{2}\right\}$, es decir, $x \in \{-5, 3\}$. Como se busca $x \in [0,4]$, se descarta la solución negativa, quedando que $x = 3$. Evaluando en f o en g, se obtiene que el punto de intersección es $(x,y) = (3,2)$.

(0,1 pts. por encontrar el punto de intersección)

Primera forma (usando el método del disco)

El volumen buscado es igual a

$$\pi \int_1^3 \big(g(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x + \pi \int_3^4 \big(f(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_1^3 (x-1)^2 \,\mathrm{d}x + \pi \int_3^4 (2\sqrt{4-x})^2 \,\mathrm{d}x$$

(0,4 pts. por plantear las integrales)

$$= \pi \int_1^3 (x-1)^2 \,\mathrm{d}x + \pi \int_3^4 4(4-x) \,\mathrm{d}x$$

$$= \pi \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]\Bigg|_1^3 + \pi \left[-4 \cdot \frac{(4-x)^2}{2}\right]\Bigg|_3^4$$

(0,6 pts. = 2 × 0,3 pts. por encontrar las primitivas)

$$= \pi \left[\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] + \pi \left[-4 \cdot \frac{0^2}{2} + 4 \cdot \frac{1^2}{2}\right]$$

$$= \frac{8}{3}\pi + 2\pi = \frac{14}{3}\pi.$$

(0,3 pts. por evaluar y encontrar el volumen)

Alternativa

También se puede encontrar el volumen del primer trozo (es decir, $\pi \int_1^3 (g(x))^2 \,\mathrm{d}x$) observando que se trata del volumen de un cono de base de radio 2 y altura 2.

Segunda forma (usando el método de la cáscara)

Tenemos que la curva dada por el grafo de f se expresa como $y = 2\sqrt{4-x}$, mientras que la curva dada por el grafo de g se expresa como $y = x - 1$. Elevando al cuadrado la primera ecuación y despejando x, obtenemos que $x = 4 - \dfrac{y^2}{4}$ (donde descartamos una solución porque $4 - x \geq 0$). De la segunda ecuación, resulta inmediatamente que $x = y + 1$.
Así, el volumen mediante este método se expresa como sigue

$$\int_0^2 2\pi y \left[\left(4 - \frac{y^2}{4}\right) - (y+1)\right] \mathrm{d}y = 2\pi \int_0^2 y \left[4 - \frac{y^2}{4} - y - 1\right] \mathrm{d}y$$

(0,4 pts. por plantear la integral)

$$= 2\pi \int_0^2 \left[3y - \frac{y^3}{4} - y^2\right] \mathrm{d}y$$

$$= 2\pi \left(3 \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{16} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2$$

(0,6 pts. por encontrar la primitiva)

$$= 2\pi \left(3 \cdot \frac{2^2}{2} - \frac{2^4}{16} - \frac{2^3}{3}\right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{7}{3}\right)$$

$$= \frac{14}{3}\pi.$$

(0,3 pts. por evaluar y encontrar el volumen)

c) **(3,0 pts.)** Considere la *espiral de Arquímedes* definida en coordenadas polares por la ecuación $r = \phi$, para $\phi \in [0, 4\pi]$, (dos vueltas completas).

Calcule el área de la región encerrada entre la primera y segunda vuelta de esta curva. Es decir, el área de la región sombreada en la Figura 3.

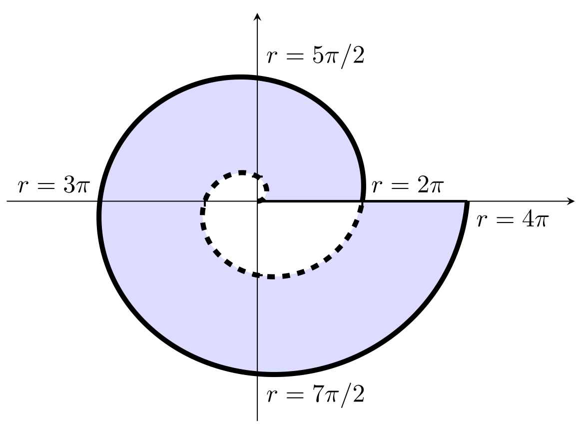
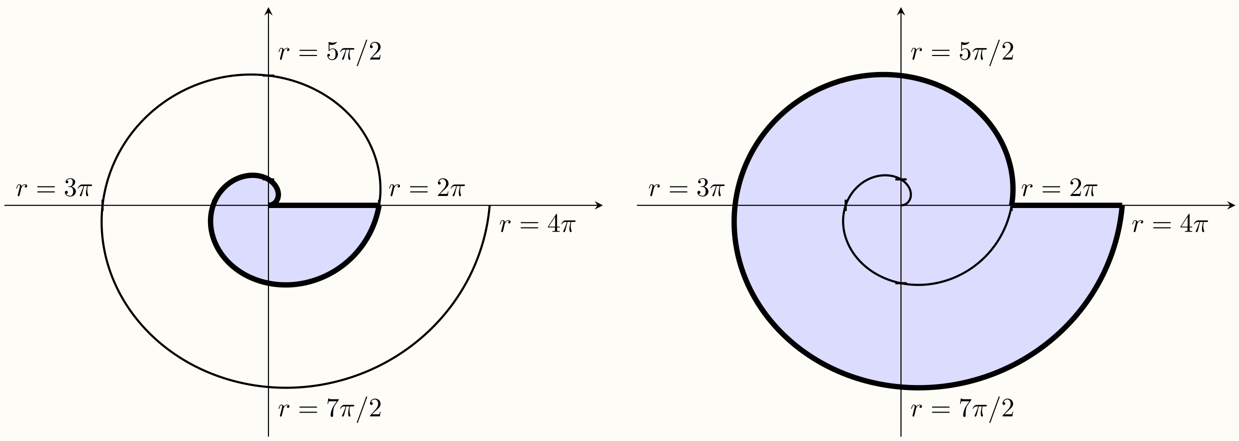


Figura 3: La Espiral de Arquímedes. La primera vuelta ($r \in [0, 2\pi]$) se ilustra con una línea punteada, y la segunda vuelta ($r \in [2\pi, 4\pi]$), con una línea sólida. Algunos valores de r están indicados para la segunda vuelta.

Solución

Para encontrar el área sombreada, se calcula el área de dos regiones, $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$, y se restan. Estas regiones se muestran en la Figura 4.



(a) Esquema de la región $\mathcal{R}_1$.

(b) Esquema de la región $\mathcal{R}_2$.

Figura 4: Las regiones consideradas.

Más precisamente, la región $\mathcal{R}_1$ es la encerrada por la espiral de Arquímedes en la primera vuelta, es decir para $\phi \in [0, 2\pi]$, es decir,

$$\mathcal{R}_1 = \{(r\cos(\phi), r\,\mathrm{sen}(\phi)) \;\mid\; \phi \in [0, 2\pi], r \in [0, \phi]\},$$

y la región $\mathcal{R}_2$ es la encerrada por la espiral de Arquímedes en la segunda vuelta, es decir, para $\phi \in [2\pi, 4\pi]$, es decir,

$$\mathcal{R}_2 = \{(r\cos(\phi), r\,\mathrm{sen}(\phi)) \;\mid\; \phi \in [2\pi, 4\pi], r \in [0, \phi]\}.$$

De esta manera, el área buscada es

$$\text{área}(\mathcal{R}_2) - \text{área}(\mathcal{R}_1)$$

(0,8 pts. por escribir el área buscada como la resta de las áreas de dos regiones)

$$= \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} \phi^2 \,\mathrm{d}\phi - \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \phi^2 \,\mathrm{d}\phi$$

(0,8 pts. por escribir las dos áreas en términos de integrales)

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\phi^3}{3}\right]\Bigg|_{2\pi}^{4\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{\phi^3}{3}\right]\Bigg|_{0}^{2\pi}$$

(0,7 pts. por calcular las primitivas)

$$= \frac{([64-8]-[8-0])\pi^3}{6} = 8\pi^3.$$

(0,7 pts. por encontrar el área buscada)