CONTROL RECUPERATIVO
CONTROL 3

P1. a) **(2 puntos)** Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\cos^2 x - \sin^2 y = \cos(x-y)\cos(x+y)$$

Solución.
Aplicando la expresiones para el coseno de la suma y diferencia de ángulos

$$\begin{aligned}\cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)\\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\end{aligned}$$

se cumple que

$$\begin{aligned}\cos(x-y)\cos(x+y) &= (\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y))(\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y))\\ &= \cos^2 x\cos^2 y - \sin^2 x \sin^2 y \qquad \textbf{(1 punto)}\end{aligned}$$

donde $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ y $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$. Entonces,

$$\begin{aligned}\cos(x-y)\cos(x+y) &= \cos^2 x\cos^2 y - \sin^2 x\sin^2 y\\ &= \cos^2 x(1-\sin^2 y) - (1-\cos^2 x)\sin^2 y \qquad \textbf{(0.5 puntos)}\\ &= \cos^2 x - \cos^2 x\sin^2 y - \sin^2 y + \cos^2 x \sin^2 y\\ &= \cos^2 x - \sin^2 y \qquad \textbf{(0.5 puntos)}\end{aligned}$$

probando lo pedido.

b) **(4 puntos)** Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación

$$2\sin(2x) + \sin(4x) + 2\cos(x) + 2\cos(x)\cos(2x) = 0$$

Solución.
Aplicando las identidades para ángulos dobles, se cumple que $\sin(2u) = 2\sin(u)\cos(u)$ para todo $u \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned}&2\sin(2x) + \sin(4x) + 2\cos(x) + 2\cos(x)\cos(2x)\\ =&2\sin(2x) + 2\sin(2x)\cos(2x) + 2\cos(x) + 2\cos(x)\cos(2x) \qquad \textbf{(0.5 puntos)}\\ =&2\sin(2x)(1+\cos(2x)) + 2\cos(x)(1+\cos(2x))\\ =&2(\sin(2x)+\cos(x))(1+\cos(2x)) \qquad \textbf{(0.5 puntos)}\\ =&2(2\sin x\cos x + \cos x)(1+\cos(2x)) \qquad \textbf{(0.5 puntos)}\\ =&2\cos x(2\sin x + 1)(1+\cos(2x)) \qquad \textbf{(0.5 puntos)}\end{aligned}$$

Así, la ecuación es equivalente a

$$2\cos x(2\sin x+1)(1+\cos(2x))=0$$

o bien, $\cos x=0$, $\sin x=-\dfrac{1}{2}$ o $\cos(2x)=-1$. Dado que

$$\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ para } k\in\mathbb{Z} \qquad \textbf{(0.5 puntos)}$$

$$\sin x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\text{ para } k\in\mathbb{Z} \qquad \textbf{(0.5 puntos)}$$

$$\begin{aligned}\cos(2x)=-1 &\Leftrightarrow 2x=\pi+2k\pi,\text{ para } k\in\mathbb{Z} \qquad \textbf{(0.5 puntos)}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\text{ para } k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

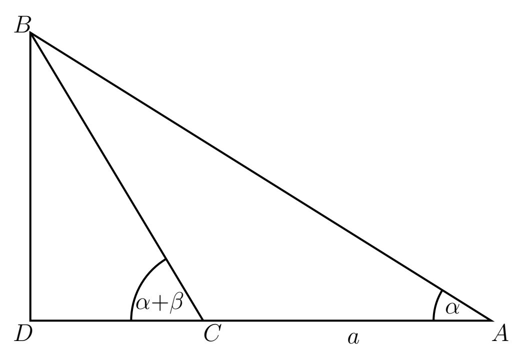
el conjunto solución está dado por

$$S=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{7\pi}{6}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\} \qquad \textbf{(0.5 puntos)}$$

Observación 1: Notar que $\cos x=0$ si y solo si $\cos(2x)=-1$, lo cual lleva a soluciones redundantes. En el caso de que aparezcan esas soluciones redundantes y no sean identificadas en la respuesta final, descuente **0.3 puntos**.

Observación 2: Es posible que las soluciones de $\sin x=-\dfrac{1}{2}$ sean escritas en la forma $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+k\pi$, para $k\in\mathbb{N}$. En tal caso, asigne el mismo puntaje señalado anteriormente.

P2. Considere la siguiente figura, donde $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ son perpendiculares, $\angle BAC=\alpha$, $\angle BCD=\alpha+\beta$ y $\left|\overline{AC}\right|=a$.



a) **(2 puntos)** Demuestre que $\left|\overline{BC}\right|=a\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

Solución.

En primer lugar, se aprecia que $\angle CBA=\beta$. **(0.5 puntos)**

Entonces, aplicando el teorema del seno, se cumple que

$$\frac{\sin\alpha}{\left|\overline{BC}\right|}=\frac{\sin\beta}{\left|\overline{AC}\right|} \qquad \textbf{(1 punto)}$$

Entonces, $\left|\overline{BC}\right|=\left|\overline{AC}\right|\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=a\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. **(0.5 puntos)**

b) **(4 puntos)** Concluya que $\left|\overline{BD}\right| = a\left(\sin^2\alpha\cot\beta + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$

Solución.
Dado que $\triangle BCD$ es rectángulo en D,

$$\frac{\left|\overline{BD}\right|}{\left|\overline{BC}\right|} = \sin(\alpha+\beta) \qquad \textbf{(1 punto)}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\left|\overline{BD}\right| &= \left|\overline{BC}\right|\sin(\alpha+\beta) \\
&= a\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\sin(\alpha+\beta) && \textbf{(0.6 puntos)} \\
&= a\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) && \textbf{(0.6 puntos)} \\
&= a(\sin^2\alpha\cot\beta + \sin\alpha\cos\alpha) && \textbf{(0.6 puntos)} \\
&= a\left(\sin^2\alpha\cot\beta + \frac{1}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha)\right) && \textbf{(0.6 puntos)} \\
&= a\left(\sin^2\alpha\cot\beta + \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right) && \textbf{(0.6 puntos)}
\end{aligned}$$

probando lo pedido.