PAUTA CONTROL 6

P1. a) **(2 puntos)** Determine el valor de $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

Solución.

Aplicando la sustitución $u = 1-x$, se tiene que **(0.4 p.)**

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \lim_{u\to 0} u\tan\left(\frac{\pi(1-u)}{2}\right) \quad \textbf{(0.3 p.)}$$

donde

$$\tan\left(\frac{\pi(1-u)}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi u}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi u}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi u}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi u}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi u}{2}\right)} \quad \textbf{(0.3 p.)}$$

Entonces,

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \lim_{u\to 0}\frac{2}{\pi}\left(\frac{\frac{\pi u}{2}}{\sin\left(\frac{\pi u}{2}\right)}\right)\cos\left(\frac{\pi u}{2}\right) \quad \textbf{(0.5 p.)}$$

Aplicando Álgebra de Límites, se concluye que

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\lim_{u\to 0}\cos\left(\frac{\pi u}{2}\right)}{\lim_{u\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi u}{2}\right)}{\frac{\pi u}{2}}}\right) = \frac{2}{\pi} \quad \textbf{(0.5 p.)}$$

b) **(4 puntos)** Determine los valores de las constantes $a, b \in \mathbb{R}$ de tal forma que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left((1+a)x^2\right)}{1-\cos(x)} & \text{si } x < 0 \\ b & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^{ax}-1}{\ln\left(\frac{x}{4}+1\right)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Solución.

En primer lugar, para $x < 0$

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\sin\left((1+a)x^2\right)}{1-\cos(x)} &= (1+a)\left(\frac{\sin\left((1+a)x^2\right)}{(1+a)x^2}\right)\left(\frac{x^2}{1-\cos(x)}\right) \\ &= (1+a)\left(\frac{\sin\left((1+a)x^2\right)}{(1+a)x^2}\right)\left(\frac{x^2(1+\cos(x))}{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}\right) \\ &= (1+a)\left(\frac{\sin\left((1+a)x^2\right)}{(1+a)x^2}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2(1+\cos(x)) \quad \textbf{(0.4 p.)} \end{aligned}$$

donde, aplicando la sustitución $u = (1+a)\,x^2$,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin\left((1+a)\,x^2\right)}{(1+a)\,x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin u}{u} = 1 \qquad \textbf{(0.3 p.)}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 = 1^2 = 1 \qquad \textbf{(0.2 p.)}$$

$$\lim_{x\to 0^-} 1 + \cos(x) = 2 \qquad \textbf{(0.2 p.)}$$

Así, por Álgebra de Límites,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \left[(1+a)\left(\frac{\sin\left((1+a)\,x^2\right)}{(1+a)\,x^2}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 (1+\cos(x))\right] && \textbf{(0.2 p.)}\\ &= 2\,(1+a) && \textbf{(0.2 p.)}\end{aligned}$$

En segundo lugar, para $x > 0$,

$$f(x) = \frac{e^{ax}-1}{\ln\left(\frac{x}{4}+1\right)} = 4a\left(\frac{e^{ax}-1}{ax}\right)\frac{\frac{x}{4}}{\ln\left(\frac{x}{4}+1\right)} \qquad \textbf{(0.4 p.)}$$

donde, aplicando sustituciones simples,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{ax}-1}{ax} = \lim_{u\to 0^+} \frac{e^u-1}{u} = 1 \qquad \textbf{(0.4 p.)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{x}{4}}{\ln\left(\dfrac{x}{4}+1\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{u}{\ln(u+1)} = 1 \qquad \textbf{(0.4 p.)}$$

Por ende, aplicando Álgebra de Límites,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[4a\left(\frac{e^{ax}-1}{ax}\right)\frac{\frac{x}{4}}{\ln\left(\frac{x}{4}+1\right)}\right] = 4a \qquad \textbf{(0.3 p.)}$$

De esta forma, para que el límite $\lim_{x\to 0} f(x)$ exista, debe cumplirse que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$, es decir **(0.3 p.)**

$$\begin{aligned} 2\,(1+a) &= 4a \\ a &= 1 && \textbf{(0.3 p.)}\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\lim_{x\to 0} f(x) = 4a = b = f(0)$. En conclusión, $b = 4$. **(0.4 p.)**

P2. a) **(1 punto)** Demuestre que $\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) \leq \dfrac{x}{x+1}$ para $x > 0$.

Solución.

Para $u \in \mathbb{R}$, se cumple que $\exp(u) \geq u + 1$. **(0.3 p.)**

Tomando $x > 0$ y $u = \dfrac{1}{x}$, se cumple que

$$\exp\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{x} + 1 = \frac{x+1}{x} > 0 \qquad \textbf{(0.3 p.)}$$

Tomando el recíproco de esta desigualdad, se concluye que

$$\frac{1}{\exp\left(\frac{1}{x}\right)} = \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \leq \frac{x}{x+1} \qquad \textbf{(0.4 p.)}$$

probando lo pedido.

b) **(1 punto)** Use el Teorema del Sandwich apropiadamente para demostrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0$$

Solución.

Aplicando el resultado de la parte anterior para $x \neq 0$, se tiene que

$$0 \leq \left| \frac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right) = \frac{|x|}{x^2+1}$$

o bien,

$$-\frac{|x|}{x^2+1} \leq \frac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{x} \leq \frac{|x|}{x^2+1} \qquad \textbf{(0.5 p.)}$$

Dado que $\lim_{x \to 0} \left(\frac{|x|}{x^2+1} \right) = \lim_{x \to 0} 0 = 0$, el Teorema del Sandwich permite concluir que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0 \qquad \textbf{(0.5 p.)}$$

c) **(4 puntos)** Use el resultado de la parte b) para hallar, si existen, las asíntotas de la función

$$f(x) = \frac{x \exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) + 3x^3}{x^2 - 1}$$

Indicación: Puedes usar el siguiente resultado sin demostrarlo.

Sean $a, L \in \mathbb{R}$ y $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a^+} g(x) = +\infty$.

- $\lim_{x \to a^+} [f(x) + g(x)] = +\infty$
- Si $L > 0$, entonces $\lim_{x \to a^+} f(x)g(x) = +\infty$.

El resultado también es válido si se reemplaza a^+ por a^- o si se reemplaza $+\infty$ por $-\infty$.

Solución.

Se tiene que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Por ende, se deben analizar dos posibles asíntotas verticales, dadas por $x = -1$ y $x = 1$. En caso de que se encuentre otra asíntota vertical, descuente **(0.5 p)**

Si $x < -1$, se tiene que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x \exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) + 3x^3}{x^2 - 1} \\ &= \frac{1}{x+1} \left(\frac{x \exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) + 3x^3}{x-1} \right) \\ &= \frac{1}{x+1} \left(\frac{x \exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)}{x-1} + \frac{3x^3}{x-1} \right) \end{aligned} \qquad \textbf{(0.2 p.)}$$

donde

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x \exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) + 3x^3}{x-1} = \frac{e^{-1/4} - 3}{2} < 0$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty \qquad \textbf{(0.6 p.)}$$

Así, aplicando la indicación convenientemente, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$. Por lo tanto, $x = -1$ es asíntota vertical. **(0.2 p.)**

Observe que es posible obtener $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ siguiendo el mismo razonamiento antes descrito.

Ahora, para $x > 1$, se cumple que

$$\frac{x\exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)+3x^3}{x^2-1} = \frac{x}{x+1}\left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)}{x-1}\right)+\frac{3x^3}{x+1}\left(\frac{1}{x-1}\right) \qquad \textbf{(0.2 p.)}$$

donde, aplicando el resultado de la parte b),

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x+1}\left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)}{x-1}\right) = \frac{1}{2}(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{3x^3}{x+1} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}\right) = +\infty \qquad \textbf{(0.6 p.)}$$

Por lo tanto, la indicación nos ayuda a concluir que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. De esta forma, $x = 1$ es asíntota vertical. **(0.2 p.)**

Cabe destacar que también es posible obtener $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ siguiendo el mismo razonamiento antes descrito.

Por otra parte, para $|x| > 1$, se cumple que

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \frac{x\exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)+3x^3}{x(x^2-1)}\\ &= \frac{1}{x^2-1}\exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)+\frac{3x^2}{x^2-1}\\ &= \left(\frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}\right)\exp\left(-\frac{\frac{1}{x^2}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}\right)+\frac{3}{1-\frac{1}{x^2}} \qquad \textbf{(0.2 p.)}\end{aligned}$$

Entonces, por Álgebra de Límites,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to +\infty}\left[\left(\frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}\right)\exp\left(-\frac{\frac{1}{x^2}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}\right)+\frac{3}{1-\frac{1}{x^2}}\right]\\ &= \left(\frac{0}{1-0}\right)\exp\left(-\frac{0}{(1-0)^2}\right)+\frac{3}{1-0} = 3 = m \qquad \textbf{(0.5 p.)}\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty} f(x) - mx &= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x\exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)+3x^3}{x^2-1} - 3x\right)\\ &= \lim_{x\to +\infty}\frac{x\exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)+3x}{x^2-1}\\ &= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}\right)\exp\left(-\frac{\frac{1}{x^2}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}\right)+3\left(\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}\right) = 0 = n \qquad \textbf{(0.5 p.)}\end{aligned}$$

Así, $y = mx + n = 3x$ es asíntota oblicua. **(0.2 p.)**

Cabe destacar que, en este caso

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \qquad \textbf{(0.2 p.)}$$

y

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to -\infty} f(x) - mx = n \qquad \textbf{(0.2 p.)}$$

por lo que la asíntota oblicua antes obtenida es la única. **(0.2 p.)**

No existe asíntota horizontal.

Tiempo: 1:30h