Pauta de corrección Control Recuperativo

C1. a) Considere la función $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in (-1,0)\cup(0,1), \\ -1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

i) **(1,5 pts.)** Demuestre que f es continua y derivable en $\bar{x} = 0$, y calcule $f'(0)$.

Solución

Veamos primero que f es continua en $\bar{x}=0$. Para esto, calculamos el límite

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)} \overset{\text{(l'Hôp.)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1+x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{1-x} = -1 = f(0),$$

(0,4 pts. por calcular este límite)

donde el uso de la regla de l'Hôpital se justifica porque el límite es de la forma "$0/0$"; las funciones $\ln(1-x)$ y $\ln(1+x)$ son ambas derivables porque son la composición del logaritmo natural (que es derivable) con polinomios; y $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$ nunca se anula.

(0,2 pts. por justificar el uso de la regla de l'Hôpital)

Veamos ahora que f es derivable en $\bar{x}=0$. Se tiene que

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)} - (-1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)} + 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+\ln(1+x)}{x\ln(1+x)} \\ &\overset{\text{(l'Hôp.)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-(1+x)+(1-x)}{(1-x)((1+x)\ln(1+x)+x)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-2x}{(1-x)((1+x)\ln(1+x)+x)} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{(1+x)\ln(1+x)+x}\right) \\ &= 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{(1+x)\ln(1+x)+x} \overset{\text{(l'Hôp.)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-2}{\ln(1+x)+2} = -1, \end{aligned}$$

(0,6 pts. por calcular este límite)

donde los usos de la regla de l'Hôpital se justifican porque los límites donde la forma "$0/0$; las funciones $\ln(1-x)$, $\ln(1+x)$, $x\ln(1+x)$, $-2x$ y $(1+x)\ln(1+x)+x$ son derivables por ser sumas, multiplicaciones o composiciones de polinomios y el logaritmo natural; y además las funciones $(x\ln(1+x))' = \ln(1+x)+\frac{x}{1+x}$ y $((1+x)\ln(1+x)+x)' = \ln(1+x)+2$ nunca se anulan si $x\in(-1/2,1/2)\setminus\{0\}$. Concluimos así que f es derivable en $\bar{x}=0$ y que $f'(0)=-1$. **(0,2 pts. por justificar el uso de la regla de l'Hôpital)**

Además, la última igualdad se justifica por la continuidad de la función $\dfrac{-2}{\ln(1+x)+2}$ en $\bar{x}=0$.

(0,1 pts. por usar la continuidad para justificar el último límite)

Alternativa

En vez de calcular el factor $\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}\right)$ por separado, también se puede multiplicar con el resto del denominador obteniendo

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{(1-x^2)\ln(1+x)+(x-x^2)}\\ \overset{\text{(l'Hôp.)}}{=}&\lim_{x\to 0}\frac{-2}{(-2x)\ln(1+x)+\frac{1-x^2}{1+x}+(1-2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{-2x\ln(1+x)+(1-x)+(1-2x)}=-1.\end{aligned}$$

En este caso, el uso de la regla de l'Hôpital se justifica de manera similar, ya que la derivada del denominador no se anula en $(-1/2,1/2)$. Además, también debe usarse la continuidad para justificar el último límite.

Alternativa

También se puede argumentar que toda función derivable es continua, evitando tener que calcular el primer límite.

ii) **(1,5 pts.)** Justifique que f es derivable en todo su dominio y calcule su derivada.

Solución

Por la parte anterior, f es derivable en $\bar{x}=0$ y $f'(0)=-1$.

Si $\bar{x}\neq 0$, f es igual a la función $\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)}$ para todo $x\in(\bar{x}-\delta,\bar{x}+\delta)$, donde $\delta>0$ se elige para que $0\notin(\bar{x}-\delta,\bar{x}+\delta)$. Como la función $\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)}$ es derivable en $\bar{x}$ al escribirse como combinación de la función logaritmo natural (que es derivable) con polinomios, donde el denominador no se anula, las derivadas de estas dos funciones en $\bar{x}$ coinciden. **(0,4 pts. por justificar que, lejos de cero, f es derivable)**

Calculamos entonces:

$$f'(\bar{x})=\frac{-\dfrac{\ln(1+\bar{x})}{1-\bar{x}}-\dfrac{\ln(1-\bar{x})}{1+\bar{x}}}{\big(\ln(1+\bar{x})\big)^2}=-\frac{(1+\bar{x})\ln(1+\bar{x})+(1-\bar{x})\ln(1-\bar{x})}{(1-\bar{x}^2)\big(\ln(1+\bar{x})\big)^2}.$$

(0,9 pts. por calcular la derivada de f lejos de cero)

Combinando esto con la parte anterior, se concluye que f es derivable en todo $(-1,1)$ y que

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x)}{(1-x^2)\big(\ln(1+\bar{x})\big)^2} & x\neq 0\\ -1 & x=0.\end{cases}$$

(0,2 pts. por expresar la derivada de f)

b) **(3,0 pts.)** Sea $\alpha\in(0,1)$. Pruebe que, para todo $x\in[0,1)$, se cumple que

$$x^\alpha\leq \alpha x+(1-\alpha).$$

<u>Indicación:</u> Defina $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ por $f(x)=\alpha x-x^\alpha$ y use el teorema del valor medio en el intervalo $[t,1]$ para $t\in[0,1)$ adecuado.

Solución

Primera forma (usando el teorema del valor medio)

Sea $x \in [0,1)$. Siguiendo la indicación con $t = x$, usamos el teorema del valor medio en el intervalo $[x,1]$. **(0,5 pts. por especificar correctamente dónde se usará el teorema del valor medio)**
Esto se puede hacer porque f es continua en $[x,1]$ y derivable en $(x,1)$ al ser la resta entre un polinomio y una potencia (con argumento no negativo).

(0,4 pts. por justificar las hipótesis del teorema del valor medio)

Así, existe $\xi \in (x,1)$ tal que

$$\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = f'(\xi).$$

(0,4 pts. por usar el teorema del valor medio)

Por otro lado, tenemos que

$$\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \frac{(\alpha - 1) - (\alpha x - x^{\alpha})}{1 - x}$$

(0,4 pts. por encontrar esta expresión)

y además que

$$f'(\xi) = \alpha - \alpha \xi^{\alpha - 1} = \alpha(1 - \xi^{\alpha - 1}) = \alpha \left(1 - \frac{1}{\xi^{1-\alpha}}\right).$$

(0,5 pts. por encontrar $f'(\xi)$)

Como $\xi \in (0,1)$ y $1 - \alpha > 0$, se tiene que $\xi^{1-\alpha} \in (0,1)$ y, por lo tanto, que $\dfrac{1}{\xi^{1-\alpha}} \geq 1$. Así, $f'(\xi) \leq 0$.

(0,4 pts. por mostrar que $f'(\xi) \leq 0$)

Concluimos de este modo que

$$\frac{(\alpha - 1) - (\alpha x - x^{\alpha})}{1 - x} \leq 0 \implies \alpha - 1 - \alpha x + x^{\alpha} \leq 0 \iff x^{\alpha} \leq \alpha x + (1 - \alpha).$$

(0,4 pts. por obtener lo pedido)

Segunda forma (calculando el mínimo de f)

Lo pedido es equivalente a $\alpha - 1 \leq \alpha x - x^\alpha$ para todo $x \in [0,1)$, es decir, $f(x) \geq \alpha - 1$ para todo $x \in [0,1)$. Tenemos que $f(1) = \alpha - 1$, así que lo buscado es $f(x) \geq f(1)$ para todo $x \in [0,1]$ (donde podemos cambiar $[0,1)$ por $[0,1]$ porque siempre se tiene que $f(1) \geq f(1)$). Mostraremos entonces que $\bar{x} = 1$ es un mínimo global de f.

(0,3 pts. por notar que basta mostrar que $\bar{x} = 1$ es un mínimo global de f)

Sea $g\colon [0,+\infty)$ dada por $g(x) = \alpha x - x^\alpha$. Se tiene que g es continua en $[0,+\infty)$ y derivable en $(0,+\infty)$ al ser una resta de un polinomio y una potencia.

(0,3 pts. por justificar que g es derivable)

Tenemos que

$$g'(x) = \alpha - \alpha x^{\alpha-1}.$$

(0,3 pts. por calcular la derivada de g)

Los puntos críticos $\bar{x} \in (0,1)$ de g son aquellos donde $g'(\bar{x}) = 0$, es decir,

$$\alpha - \alpha \bar{x}^{\alpha-1} = 0 \iff \alpha = \alpha \bar{x}^{\alpha-1} \iff \bar{x}^{1-\alpha} = 1 \iff \bar{x} = 1,$$

donde usamos que $\alpha \neq 0$ y $1 - \alpha \neq 0$. **(0,3 pts. por encontrar los puntos críticos de g)**

Derivando nuevamente, tenemos que

$$g''(x) = \alpha(1-\alpha)x^{\alpha-2},$$

(0,3 pts. por calcular la segunda derivada de g)

de donde $g''(\bar{x}) = g''(1) = \alpha(1-\alpha) > 0$. **(0,3 pts. por mostrar que $g''(1) > 0$)**

Por lo tanto, $\bar{x} = 1$ es un mínimo local de g.

(0,3 pts. por obtener que $\bar{x} = 1$ es un mínimo local de g)

Además,

$$g(0) = 0 > \alpha - 1, \qquad \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty,$$

(0,3 pts. por calcualr estos límites)

con lo que concluimos que $\bar{x} = 1$ es un mínimo global de g.

(0,3 pts. por obtener que $\bar{x} = 1$ es un mínimo global de g)

Así, $g(x) \geq g(1) = \alpha - 1$ para todo $x \in [0,+\infty)$. Como f y g coinciden en $[0,1]$, esto muestra también que $f(x) \geq f(1) = \alpha - 1$ para todo $x \in [0,1]$.

(0,3 pts. por obtener lo pedido)

C2. a) Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^3 e^x.$$

i) **(1,0 pto.)** Estudie la derivabilidad de f, calcule f' donde f sea derivable y encuentre todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f'(\bar{x}) = 0$.

Solución

La función f es derivable en todo $\mathbb{R}$ al ser la multiplicación de un polinomio con la función exponencial, que es conocidamente derivable. **(0,3 pts. por justificar que f es derivable en todo $\mathbb{R}$)**

Tenemos que

$$f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2(3+x)e^x.$$

(0,5 pts. por calcular la derivada de f)

Así, imponiendo $f'(\bar{x}) = 0$ resulta que $\bar{x} = 0$ o $\bar{x} = -3$, ya que la exponencial de un número nunca es cero.

(0,2 pts. por encontrar los puntos críticos de f)

ii) **(1,0 pto.)** Encuentre los intervalos (si los hay) donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos mínimos y máximos, locales y globales, de f.

Solución

Para determinar dónde f es creciente y dónde es decreciente, debemos determinar cuándo f' es positiva y cuándo es negativa. Se tiene que

$$f'(x) \geq 0 \iff x^2 e^x (3+x) \geq 0 \iff 3+x \geq 0 \iff x \geq -3$$

ya que $x^2 \geq 0$ y $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. **(0,2 pts. por expresar estas desigualdades)**
Concluimos así que f es creciente en el intervalo $[-3, +\infty)$ y que es decreciente en el intervalo $(-\infty, -3]$.
(0,4 pts. por determinar los intervalos de monotonía de f)
Vemos así que, en $\bar{x} = -3$, f pasa de ser decreciente a creciente, así que $\bar{x}$ es un mínimo local. Por otro lado, en $\bar{x} = 0$, f no cambia de crecimiento (es siempre creciente), así que no es ni mínimo ni máximo local.
(0,2 pts. por determinar la naturaleza de los puntos críticos de f)

Alternativa

También es posible continuar derivando para mostrar que $f''(-3) = 9e^{-3} > 0$, $f''(0) = 0$ y $f'''(0) = 6 \neq 0$ para mostrar que $\bar{x} = -3$ es un mínimo local y que $\bar{x} = 0$ es un punto de inflexión de f.

Como $\bar{x} = -3$ es el único mínimo local de f y además se tiene que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 > f(-3), \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty,$$

se concluye que $\bar{x} = -3$ es el mínimo global de f.
(0,1 pts. por demostrar que $\bar{x} = 3$ es mínimo global de f)
Finalmente, f no tiene máximos, ni locales, ni globales.
(0,1 pts. por notar que f no tiene máximos ni locales, ni globales)

iii) **(1,0 pto.)** Determine dónde f es dos veces derivable, calcule f'' allí, y calcule todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f''(\bar{x}) = 0$.

Solución

Tenemos que f' también es derivable en todo $\mathbb{R}$ por ser la multiplicación de un polinomio y la función exponencial (que es conocidamente derivable).
(0,3 pts. por justificar que f' es derivable en todo $\mathbb{R}$)
Así,

$$f''(x) = (3x^2 + x^3)' e^x + (x^3 + 3x^2)(e^x)' = (6x + 3x^2)e^x + (x^3 + 3x^2)e^x = x(x^2 + 6x + 6)e^x.$$

(0,5 pts. por calcular la derivada de f')

Imponemos ahora que $f''(\bar{x}) = 0$. Como la exponencial de un número nunca es cero, esto es equivalente a

$$\bar{x}(\bar{x}^2 + 6\bar{x} + 6) = 0 \iff (\bar{x} = 0) \vee (\bar{x}^2 + 6\bar{x} + 6 = 0).$$ **(0,1 pts. por plantear estas ecuaciones)**

Para resolver la ecuación cuadrática, usamos la fórmula cuadrática. Resulta $\bar{x} \in \left\{ \frac{-6 - \sqrt{12}}{2}, \frac{-6 + \sqrt{12}}{2} \right\}$ o, equivalentemente, $\bar{x} \in \{-3 - \sqrt{3}, -3 + \sqrt{3}\}$. **(0,1 pts. por resolver la ecuación cuadrática)**
Finalmente se obtiene que

$$f''(\bar{x}) = 0 \iff \bar{x} \in \{0, -3 - \sqrt{3}, -3 + \sqrt{3}\}.$$

iv) **(1,0 pto.)** Determine los intervalos donde f es convexa y donde es cóncava (si los hay).

Solución

Para determinar los intervalos de convexidad y concavidad, debemos determinar el signo de f''. Tenemos que

$$f''(x) \geq 0 \iff x(x^2 + 6x + 6)e^x \geq 0 \iff x(x^2 + 6x + 6) \geq 0$$

ya que $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. **(0,3 pts. por plantear estas desigualdades)**
Para determinar entonces en qué intervalos esto ocurre, determinamos el signo de $x^2 + 6x + 6 \geq 0$. Como es

una función cuadrática con coeficiente líder (el que acompaña a x^2) positivo, se tiene que $x^2+6x+6<0$ solo entre sus raíces, es decir, en el intervalo $(-3-\sqrt{3}, -3+\sqrt{3})$.

(0,2 pts. por determinar cuándo la función cuadrática es negativa)

Alternativa

También se puede evaluar en un punto de cada uno de los intervalos $(-\infty, -3-\sqrt{3})$, $(-3-\sqrt{3}, -3+\sqrt{3})$ y $(-3+\sqrt{3}, +\infty)$ para saber si x^2+6x+6 es positivo o negativo.

Multiplicando esto por x, el signo se mantiene si $x>0$, y se invierte si $x<0$. Por lo tanto,

$$f''(x) \geq 0 \iff x \in [-3-\sqrt{3}, -3+\sqrt{3}] \cup [0, +\infty).$$

(0,2 pts. por determinar cuándo f'' es no negativa)

Concluimos que f es convexa en los intervalos $[-3-\sqrt{3}, -3+\sqrt{3}]$ y $[0, +\infty)$, y que es cóncava en los intervalos $(-\infty, -3-\sqrt{3}]$ y $[-3+\sqrt{3}, 0]$.

(0,3 pts. por encontrar los intervalos de convexidad y concavidad)

b) **(2,0 pts.)** Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $\alpha > 0$, considere

$$I_n = \int t^\alpha \big(\ln(t)\big)^n \, \mathrm{d}t.$$

Integrando por partes adecuadamente, muestre que, para cada $n \geq 2$,

$$I_n = \frac{t^{\alpha+1}\big(\ln(t)\big)^n}{\alpha+1} - \left(\frac{n}{\alpha+1}\right) I_{n-1}.$$

Solución

Utilizando integración por partes en I_n con $u = \ln(t)^n$ y $\mathrm{d}v = t^\alpha$ tenemos

$$\begin{aligned} u = \big(\ln(t)\big)^n &\implies \mathrm{d}u = n \cdot \frac{\big(\ln(t)\big)^{n-1}}{t}\,\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}v = t^\alpha\,\mathrm{d}t &\implies v = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \end{aligned}$$

(0,5 pts. por plantear la integración por partes)

Entonces,

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{t^{\alpha+1}\big(\ln(t)\big)^n}{\alpha+1} - \int \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} n \cdot \frac{\big(\ln(t)\big)^{n-1}}{t} dt && \textbf{(0,5 pts. por hacer la integración por partes)} \\ &= \frac{t^{\alpha+1}\big(\ln(t)\big)}{\alpha+1} - \left(\frac{n}{\alpha+1}\right) \int t^\alpha \big(\ln(t)\big)^{n-1} dt && \textbf{(0,5 pts. por reordenar y simplificar)} \\ &= \frac{t^{\alpha+1}\big(\ln(t)\big)^n}{\alpha+1} - \left(\frac{n}{\alpha+1}\right) I_{n-1}. && \textbf{(0,5 pts. por reconocer el término } \boldsymbol{I_{n-1}} \textbf{ y concluir)} \end{aligned}$$

C3. a) Suponga que la función $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable y satisface la ecuación

$$x = \int_1^{y(x)} \exp\left(x - t^2\right) \, \mathrm{d}t,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

i) **(1,5 pts.)** Demuestre que $y(0) = 1$.

Solución

Observamos que, imponiendo $x = 0$ en la hipótesis, resulta

$$0 = \int_1^{y(0)} \exp\left(-t^2\right)\, \mathrm{d}t. \qquad (*)$$

(0,5 pts. por establecer la igualdad)

Definiendo la función auxiliar $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(t) = \exp\left(-t^2\right)$ tenemos que $f(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(0,4 pts. por mencionar que f es positiva en todo $\mathbb{R}$)

Suponemos por contradicción que $y(0) = b > 1$. Se tiene entonces que

$$\int_1^{y(0)} f(t)\, \mathrm{d}t = \int_1^b f(t)\, \mathrm{d}t = \int_1^b \exp\left(-t^2\right)\, \mathrm{d}t > 0$$

ya que es la integral de una función estrictamente positiva en el intervalo $[1, b]$. Similarmente, si $b < 1$, el resultado será estrictamente negativo:

$$\int_1^{y(0)} f(t)\, \mathrm{d}t = \int_1^b f(t)\, \mathrm{d}t = -\int_b^1 \exp\left(-t^2\right)\, \mathrm{d}t < 0$$

al ser el inverso aditivo de la integral de una función estrictamente positiva en el intervalo $[b, 1]$.

(0,4 pts. por demostrar que la integral no es cero si $y(0) \neq 1$)

Concluimos que la única manera para que la integral resulte ser cero es que $y(0) = 1$. Como esto ocurre por $(*)$, se concluye que $y(0) = 1$. **(0,2 pts. por concluir)**

ii) **(1,5 pts.)** Demuestre que $y'(0) = \exp(1)$.
Indicación: Recuerde y use las propiedades de la función exponencial. Además, puede usar sin demostración que $\left(\int_{u(x)}^{v(x)} h(t)\, \mathrm{d}t\right)' = h(v(x))v'(x) - h(u(x))u'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, toda función continua h, y todas funciones derivables u, v.

Solución

Notamos que

$$x = \int_1^{y(x)} \exp\left(x - t^2\right)\, \mathrm{d}t = \int_1^{y(x)} \exp(x) \cdot \exp\left(-t^2\right)\, \mathrm{d}t,$$

(0,2 pts. por establecer que $\exp\left(x - t^2\right) = \exp(x) \cdot \exp\left(-t^2\right)$ de forma correcta)

es decir,

$$x = \exp(x) \int_1^{y(x)} \exp\left(-t^2\right)\, \mathrm{d}t. \qquad (1)$$

(0,2 pts. por notar que $\exp(x)$ se comporta como una constante)

Usando la indicación, como la función $\exp\left(-t^2\right)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y la función y es derivable (y la función constante igual a cero también lo es), se tiene que

$$\left(\int_1^{y(x)} \exp\left(-t^2\right)\, \mathrm{d}t\right)' = \exp\left(-\left[y(x)\right]^2\right) \cdot y'(x) - \exp\left(-\left[0\right]^2\right) \cdot 0' = \exp\left(-\left[y(x)\right]^2\right) \cdot y'(x). \qquad (2)$$

(0,2 pts. por usar la indicación para encontrar $\left(\int_1^{y(x)} \exp\left(-t^2\right)\, \mathrm{d}t\right)'$)

Ahora, derivando a ambos lados en (1) y usando la regla del producto se obtiene que

$$1 = (\exp(x))' \cdot \left(\int_1^{y(x)} \exp\left(-t^2\right)\, \mathrm{d}t\right) + \exp(x) \cdot \left(\int_1^{y(x)} \exp\left(-t^2\right)\, \mathrm{d}t\right)'.$$

(0,2 pts. por utilizar regla y del producto de manera correcta)

Juntando esto con (2), resulta

$$1 = \exp(x) \cdot \left(\int_1^{y(x)} \exp\left(-t^2\right)\, \mathrm{d}t \right) + \exp(x) \cdot \exp\left(-\left[y(x)\right]^2 \right) \cdot y'(x).$$

Tomando $x = 0$ en esta última igualdad, vamos a tener que

$$1 = \exp(0) \cdot \left(\int_1^{y(0)} \exp\left(-t^2\right)\, \mathrm{d}t \right) + \exp(0) \cdot \exp\left(-\left[y(0)\right]^2 \right) \cdot y'(0).$$

(0,2 pts. por evaluar $x = 0$ de manera correcta)

Ahora, usando que $y(0) = 1$ (por la parte anterior), se tiene que

$$\int_1^{y(0)} \exp\left(-t^2\right)\, \mathrm{d}t = \int_1^{1} \exp\left(-t^2\right)\, \mathrm{d}t = 0.$$

(0,2 pts. por justificar por qué se anula el término que depende de la integral)

Como además $\exp(0) = 1$, resulta

$$1 = \exp(-1) \cdot y'(0),$$ **(0,2 pts. por establecer esta igualdad)**

Finalmente, despejando $y'(0)$ obtenemos que

$$y'(0) = \exp(1).$$ **(0,1 pts. por concluir)**

b) Considere la función $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Para $a > 1$, considere la región bajo la curva f en el intervalo $[1, a]$, es decir,

$$\mathcal{R}_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x \in [1, a], y \in [0, f(x)]\}.$$

i) **(0,5 pts.)** Calcule el volumen V_a del sólido de revolución obtenido al rotar la región $\mathcal{R}_a$ en torno al eje horizontal.

Solución

El volumen se calcula como

$$V_a = \pi \int_1^a \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_1^a \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x$$ **(0,2 pts. por plantear la integral)**

$$= \pi \left[-\frac{1}{x} \right]\Bigg|_1^a$$ **(0,2 pts. por encontrar la primitiva)**

$$= \pi \left(1 - \frac{1}{a} \right).$$ **(0,1 pts. por evaluar y encontar el volumen)**

ii) **(1,5 pts.)** Calcule la superficie S_a del manto del sólido de revolución obtenido al rotar la región $\mathcal{R}_a$ en torno al eje horizontal.

Indicación: Puede serle útil usar que, si $x > 0$, entonces $(\ln(\sqrt{x^2+1} + x))' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Solución

La superficie se calcula como

$$S_a = 2\pi \int_1^a f(x) \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, \mathrm{d}x = 2\pi \int_1^a \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\, \mathrm{d}x$$

$$= 2\pi \int_1^a \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}}\, \mathrm{d}x = 2\pi \int_1^a \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\, \mathrm{d}x.$$ **(0,3 pts. por plantear la integral)**

Para calcular esta integral, comenzamos haciendo el cambio de variable

$$t = x^2 \implies \mathrm{d}t = 2x\, \mathrm{d}x$$

(0,2 pts. por plantear el cambio de variable)

obteniendo

$$S_a = \pi \int_1^{a^2} \frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

(0,2 pts. por hacer el cambio de variable)

Ahora, integramos por partes con

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{t^2+1} \implies \mathrm{d}u = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}v &= \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}x \qquad \implies \quad v = -\frac{1}{t}. \end{aligned}$$

(0,4 pts. por plantear la integración por partes)

para obtener

$$S_a = \pi\left(\left[-\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\right]\Bigg|_1^{a^2} - \int_1^{a^2}\left(-\frac{1}{t}\right)\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)\mathrm{d}t\right)$$

(0,2 pts. por hacer la integración por partes)

$$\begin{aligned} &= \pi\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{a^4+1}}{a^2} + \int_1^{a^2} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t\right) = \pi\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{a^4+1}}{a^2} + \left[\ln(\sqrt{t^2+1}+t)\right]\Big|_1^{a^2}\right) \\ &= \pi\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{a^4+1}}{a^2} + \ln(\sqrt{a^4+1}+a^2) - \ln(\sqrt{2}+1)\right). \end{aligned}$$

(0,2 pts. por evaluar y encontrar la superficie)

iii) **(1,0 pto.)** Concluya que $\lim\limits_{a\to\infty} V_a$ existe, pero que $\lim\limits_{a\to\infty} S_a$ diverge.

Solución

Usando álgebra de límites, tenemos que

$$\lim_{a\to\infty} V_a = \lim_{a\to\infty} \pi\left(1 - \frac{1}{a}\right) = \pi,$$

por lo que este límite existe. **(0,5 pts. por encontrar este límite)**

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \lim_{a\to\infty} S_a &= \lim_{a\to\infty} \pi\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{a^4+1}}{a^2} + \ln(\sqrt{a^4+1}+a^2) - \ln(\sqrt{2}+1)\right) \\ &= \pi\sqrt{2} - \pi\ln(\sqrt{2}+1) - \pi\left(\lim_{a\to\infty}\frac{\sqrt{a^4+1}}{a^2}\right) + \pi\left(\lim_{a\to\infty}\ln(\sqrt{a^4+1}+a^2)\right) \\ &= \pi\sqrt{2} - \pi\ln(\sqrt{2}+1) - \pi + \pi\cdot\infty = \infty. \end{aligned}$$

ya que $\lim\limits_{a\to\infty}(\sqrt{a^4+1}+a^2) = \infty$ y $\lim\limits_{u\to\infty}\ln(u) = \infty$ (usando el cambio de variable $u = \sqrt{a^4+1}+a^2$).

(0,5 pts. por mostrar que este límite diverge)