Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1001: Introducción al Cálculo 2024-1

Pauta de corrección Control Recuperativo 5

P1. (a) Considere la sucesión

$$c_n := \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k}\right)^k, \text{ para } n \geq 1.$$

i. **(1.0 pts)** Muestre que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

Solución: Notamos que

$$c_{n+1} - c_n = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2k}\right)^k - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k}\right)^k = \left(\frac{1}{2(n+1)}\right)^{(n+1)} > 0.$$

0.7

Lo cual muestra que (c_n) es una sucesión creciente.

0.3

ii. **(2.0 pts)** Pruebe que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente.

Solución: Es fácil ver que

$$\frac{1}{2k} \leq \frac{1}{2}, \text{ para todo } k \geq 1.$$

0.4

Lo cual implica que

$$\left(\frac{1}{2k}\right)^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k, \text{ para todo } k \geq 1.$$

0.4

De lo anterior se concluye que

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k}\right)^k \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

0.5

Por último notamos que

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1.$$

0.5

Lo anterior prueba que $c_n \leq 1$ para todo $n \geq 1$, es decir, (c_n) es una sucesión acotada superiormente.

0.2

iii. **(1.0 pts)** Concluya que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Solución: Por los puntos anteriores tenemos que (c_n) es una sucesión creciente y acotada superiormente. Luego esta converge por *teorema de las sucesiones monotonas y acotadas.*

1.0

(b) **(2.0 pts)** Considere la sucesión $a_n := \sqrt[n]{n\sin^2(n!)+5}$ para $n \geq 1$. Muestre que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$1 \leq a_n \leq \sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Decida si la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Solución: Sea $n_0 \geq 5$ cualquiera. Entonces

$$1 \leq n\sin^2(n!)+5 \leq n+n = 2n, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

0.5

Con lo cual se tiene que

$$1 \leq a_n \leq \sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}, \text{ para cada } n \geq n_0.$$

0.6

Ahora, notamos que por límite conocidos y álgebra de límites, tenemos

$$\lim \sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n} = \lim \sqrt[n]{2}\cdot\lim\sqrt[n]{n} = 1.$$

0.5

y

$$\lim 1 = 1,$$

0.1

Por lo cual el *teorema del sandwich* nos indica que

$$\lim a_n = 1.$$

0.3

P2. (a) **(3.0 pts)** Determine si la siguiente sucesión converge

$$b_n := \frac{n^n}{3^n\cdot n!}, \text{ para } n \geq 1.$$

Ind: calcular $\frac{b_{n+1}}{b_n}$.

Solución: Siguiendo la indicación calculamos

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{(n+1)^{(n+1)}}{3^{(n+1)}\cdot(n+1)!}}{\frac{n^n}{3^n\cdot n!}} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

1.0

Ahora recordamos que la sucesión $s_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es creciente y converge al número $e < 3$.

0.5

Lo anterior nos permite concluir que

0.5 $$\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \frac{e}{3} \leq 1,$$

es decir, (b_n) es decreciente.

0.5

Finalmente, por teorema de las sucesiones monotonas y acotadas se concluye que (b_n) converge.

0.5

(b) Calcule los siguientes límites

i. **(1.5 pts)**

$$\lim \left(\frac{n^4 + 3\cos(7^n)}{n^2 + 3n^4} \right)^{1/n}.$$

Solución: Primero notamos que

$$\left(\frac{n^4 + 3\cos(7^n)}{n^2 + 3n^4} \right)^{1/n} = \sqrt[n]{q_n},$$

donde $q_n := \frac{n^4+3\cos(7^n)}{n^2+3n^4}$.

0.3

Usando álgebra de límites tenemos que:

0.7 $$\lim q_n = \lim \left(\frac{n^4 + 3\cos(7^n)}{n^2 + 3n^4} \right) = \lim \left(\frac{1 + 3\frac{\cos(7^n)}{n^4}}{\frac{1}{n^2} + 3} \right) = \frac{1}{3}$$

Como $\lim q_n > 0$, tenemos que $\lim \sqrt[n]{q_n} = 1$.

0.5

ii. **(1.5 pts)**

$$\lim \left(1 + \frac{n^3}{2^n} \right)^n.$$

Solución:

Notamos que $\left(1 + \frac{n^3}{2^n}\right)^n = (1 + h_n)^n$, donde $h_n := \frac{n^3}{2^n}$.

0.3

Luego, usando el límite conocido $\lim n^k q^n = 0$ para $q \in (-1, 1)$ y $k \in \mathbb{N}$, se concluye

$$\lim h_n = \lim n^3 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0,$$

0.4

$$\lim n \cdot h_n = \lim n^4 \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

0.4

Por lo anterior se tiene que $\lim \left(1 + \frac{n^3}{2^n}\right)^n = 1.$

0.4