Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1001: Introducción al Cálculo 2024-1

Pauta de corrección Control 1 - Recuperativo

P1. (a) **(4.5 pts)** Usando los axiomas de cuerpo de $\mathbb{R}$, los teoremas de unicidad de elementos neutros e inversos y la propiedad "$a \cdot 0 = 0$", demuestre que: Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$x^{-1} + yz^{-1} = (z + xy)(xz)^{-1}$$

(OBS: Si necesita alguna propiedad adicional, debe demostrarla)

Solución: Notamos que para cada $x, y \in \mathbb{R}$

$$(x \cdot y)^{-1} = y^{-1}x^{-1}.$$

En efecto, sean $x, y \in \mathbb{R}$ cualesquiera

$$\begin{aligned}
(xy)\cdot(y^{-1}x^{-1}) &= x(y(y^{-1}x^{-1})) && \text{Ax. asociatividad} \quad 0.3\\
&= x((yy^{-1})x^{-1}) && \text{Ax. asociatividad} \quad 0.3\\
&= x \cdot ((1)\cdot x^{-1}) && \text{Def. inverso multiplicativo} \quad 0.3\\
&= x \cdot x^{-1} && \text{Def neutro para producto} \quad 0.3\\
&= 1 && \text{Def. inverso multiplicativo} \quad 0.3
\end{aligned}$$

Luego como el inverso multiplicativo es único se concluye que $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. 0.3
Utilizando la propiedad anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
(z+xy)(xz)^{-1} &= (z+xy)(z^{-1}x^{-1}) && \\
&= (z+xy)z^{-1})x^{-1}) && \text{Ax. asociatividad}\\
&= (zz^{-1} + (xy)z^{-1})x^{-1} && \text{Ax. distributividad} \quad 0.3\\
&= (1 + (xy)z^{-1})x^{-1} && \text{Def. inverso multiplicativo} \quad 0.3\\
&= (1 + x(yz^{-1}))x^{-1} && \text{Ax. asociatividad} \quad 0.3\\
&= (1 + (yz^{-1})x)x^{-1} && \text{Ax. conmutatividad} \quad 0.3\\
&= (1x^{-1} + (yz^{-1})x)x^{-1} && \text{Ax. distributividad} \quad 0.3\\
&= x^{-1} + ((yz^{-1})x)x^{-1} && \text{Def. elemento neutro para producto} \quad 0.3\\
&= x^{-1} + (yz^{-1})(xx^{-1}) && \text{Ax. asociatividad} \quad 0.3\\
&= x^{-1} + (yz^{-1})(1) && \text{Def. inverso multiplicativo} \quad 0.3\\
&= x^{-1} + yz^{-1} && \text{Def. elemento neutro para producto} \quad 0.3
\end{aligned}$$

(b) **(1.5 pts)** Usando los axiomas y propiedades de cuerpo y orden de $\mathbb{R}$, demuestre que para cada $x, y > 0$

$$\frac{x^4}{y} + y^3 \geq 2x^2y$$

Solución: Usando la desigualdad $2ab \leq a^2 + b^2$ con $a = \frac{x^2}{y}$ y $b = y$ tenemos que

$$\frac{x^4}{y^2} + y^2 \geq 2x^2. \quad \boxed{0.5} \tag{1}$$

Luego como $y > 0$ podemos multiplicar la desigualdad (1) por y para obtener

$$\frac{x^4}{y} + y^3 \geq 2x^2y. \quad \boxed{0.5} \tag{2}$$

El estudiante debe remarcar que la desigualdad (2) no cambia de sentido ya que $y > 0$. $\boxed{0.5}$

P2. (a) **(3.5 pts)** Resolver la inecuación

$$\frac{|x+1| - 2x}{x^2+1} \leq 1$$

Solución: Como $x^2 + 1 > 0$ podemos notar que

$$\frac{|x+1| - 2x}{x^2+1} \leq 1 \Leftrightarrow |x+1| - 2x \leq x^2 + 1 \quad \boxed{0.5}$$

Entonces

$$\begin{aligned} |x+1| - 2x \leq x^2 + 1 &\Leftrightarrow |x+1| \leq x^2 + 2x + 1 \quad \boxed{0.5} \\ &\Leftrightarrow |x+1| \leq (x+1)^2 \quad \boxed{0.5} \\ &\Leftrightarrow -(x+1)^2 \leq x+1 \leq (x+1)^2 \quad \boxed{0.5} \end{aligned}$$

De donde se concluye que los intervalos de solución son la intersección de las soluciones de

$$\begin{aligned} -(x+1)^2 \leq x+1 &\Longleftrightarrow 0 \leq (x+1)(x+2) &&\Longleftrightarrow x \in]-\infty, -2] \cup [-1, +\infty[\quad \boxed{0.5} \\ x+1 \leq (x+1)^2 &\Longleftrightarrow 0 \leq x(x+1) &&\Longleftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[\quad \boxed{0.5} \end{aligned}$$

Es decir $x \in]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[\cup \{1\}$. $\boxed{0.5}$

(b) **(2.5 pts)** Considere $a > 0$. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto $(2a, 0)$ es igual al doble de su distancia del punto $(-a, 0)$.

Solución: Sea (x, y) un punto cualquiera del lugar geométrico. Entonces,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(x-2a)^2+y^2} &= 2\sqrt{(x+a)^2+y^2} && \boxed{0.5} \\
x^2-4ax+4a^2+y^2 &= 4(x^2+2ax+a^2)+4y^2 && \boxed{0.5} \\
3x^2+12ax+3y^2 &= 0 && \boxed{0.5} \\
(x+2a)^2+y^2 &= 4a^2. && \boxed{0.5}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el lugar geometrico corresponde a una circunferencia centrada en $(-2a, 0)$ con radio $r = 2a$. $\boxed{0.5}$