Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1001: Introducción al Cálculo 2024-1

Pauta de corrección Control Recuperativo

P1. (a) Considere la función definida por

$$f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}.$$

i. **(1.5 pts)** Determine $\text{Dom}(f)$, ceros, signos y paridad de f.

Solución: El dominio de la función f corresponde a todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que $1 - x^2 > 0$, es decir, $x \in (-1, 1)$. 0.5

La función posee un cero en $x = 0$. 0.2

Además es siempre mayor o igual a cero 0.2

Por último es una función par, ya que

$$f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{|-x|}{\sqrt{1-(-x)^2}} = f(-x). \quad 0.6$$

ii. **(1.5 pts)** Estudie intervalos de crecimiento o decrecimiento de f. Determine el conjunto imagen de f (o sea $Im(f)$ o $Rec(f)$ que es lo mismo), resolviendo explícitamente la ecuación $y = f(x)$

Solución: Para $x \in [0, 1)$ tenemos que la función $1 - x^2$ es decreciente, luego $\sqrt{1-x^2}$ es decreciente, de esta manera $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ es creciente. 0.4

Por otro lado $g(x) = |x|$ es creciente. 0.2

Con lo anterior se concluye que $f(x) = g(x)h(x)$ es creciente en $x \in [0, 1)$, ya que ambas funciones g, h, son no negativas. 0.1

De manera análoga se concluye que f es decreciente en $(-1, 0]$. 0.3

De lo anterior sabemos que $Im(f) \subseteq [0, +\infty)$. Ahora resolvemos $y = \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}$ para $y \geq 0$, el cual tiene por soluciones

$$x = \pm \frac{y}{1+y^2}.$$

Con lo cual concluimos que $Im(f) = [0, +\infty)$. 0.5

(b) **(3.0 pts)** Pruebe la siguiente identidad trigonométrica

$$\tan(3x) = \frac{3\tan(x) - \tan^3(x)}{1 - 3\tan^2(x)}.$$

Solución: Usando la identidad de la tangente de la suma de ángulos obtenemos

$$\tan(3x) = \frac{\tan(x) + \tan(2x)}{1 - \tan(x)\tan(2x)}. \boxed{1.0}$$

Ahora usando la misma identidad tenemos que

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan(x)^2}. \boxed{1.0}$$

Remplazando en lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned}\tan(3x) = \tan(x + 2x) &= \frac{\tan(x) + \frac{2\tan(x)}{1-\tan(x)^2}}{1 - \tan(x)\frac{2\tan(x)}{1-\tan(x)^2}} \\ &= \frac{\frac{3\tan(x)-\tan^2(x)}{1-\tan(x)^2}}{\frac{1-3\tan^2(x)}{1-\tan(x)^2}} \\ &= \frac{3\tan(x) - \tan^3(x)}{1 - 3\tan^2(x)}. \boxed{1.0}\end{aligned}$$

P2. (a) **(3.0 pts)** Resuelva la ecuación trigonométrica

$$2\sin^3(x) - \sin^2(x) - 2\sin(x) + 1 = 0.$$

Solución:

$$\begin{aligned}2\sin^3(x) - \sin^2(x) - 2\sin(x) + 1 &= 0 \\ \sin^2(x)(2\sin(x) - 1) - 2\sin(x) + 1 &= 0 \\ (2\sin(x) - 1)(\sin^2(x) - 1) &= 0. \boxed{0.9}\end{aligned}$$

Por lo cual las posibles soluciones son

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \frac{1}{2}. \boxed{0.2} \\ \sin(x) &= \pm 1. \boxed{0.4}\end{aligned}$$

con lo cual concluimos que las posibles soluciones son para $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}x &= k\pi + (-1)^k \arcsin(\tfrac{1}{2}) = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}, \boxed{0.5} \\ x &= k\pi + (-1)^k \arcsin(1) = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{2}, \boxed{0.5} \\ x &= k\pi + (-1)^k \arcsin(-1) = k\pi - (-1)^k \frac{\pi}{2}. \boxed{0.5}\end{aligned}$$

(b) **(3.0 pts)** Considere la sucesión

$$u_n := \left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}\right)\sin(n!).$$

Muestre que (u_n) es una sucesión nula.

Solución: Notamos que

$$\begin{aligned} s_n := \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1} &= \frac{1}{\sqrt[2]{n^2+2}\sqrt{n^2+1}} \\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{2}{n^2}}\right)} \end{aligned}$$

Usando lo anterior tenemos que

$$0 \leq |s_n| \leq \frac{1}{n}, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Como $\frac{1}{n}$ es nula se tiene que s_n es una sucesión nula. 2.0

Finalmente notamos que $r_n := \sin(n!)$ es una sucesión acotada, con lo cual concluimos que la sucesión u_n es el producto de una sucesión nula por una acotada y con lo cual se tiene que (u_n) es una sucesión nula. 1.0