Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1001: Introducción al Cálculo 2024-1

# Pauta Control 6 recuperativo

**P1.** (a) Calcule los siguientes límites, indicando los límites auxiliares y cambios de variable (si corresponde) usados.

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin^2(x)}-\sqrt{1-\sin^2(x)}}{\tan^2(x)}$.

**Solución:** Primero notemos que

$$\frac{\sqrt{1+\sin^2(x)}-\sqrt{1-\sin^2(x)}}{\tan^2(x)} \cdot \frac{\sqrt{1+\sin^2(x)}+\sqrt{1-\sin^2(x)}}{\sqrt{1+\sin^2(x)}+\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{2\sin^2(x)}{\tan^2(x)(\sqrt{1+\sin^2(x)}+\sqrt{1-\sin^2(x)})}$$
$$= \frac{2\cos^2(x)}{\sqrt{1+\sin^2(x)}+\sqrt{1-\sin^2(x)}}.$$

**(1 punto)**

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin^2(x)}-\sqrt{1-\sin^2(x)}}{\tan^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos^2(x)}{\sqrt{1+\sin^2(x)}+\sqrt{1-\sin^2(x)}} = 1.$$

**(1 punto)**

(ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{ax^2-a}-1}{\cos(\frac{\pi x}{2})} \quad (a \neq 0)$.

**Solución:**

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{ax^2-a}-1}{\cos(\frac{\pi x}{2})} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{ax^2-a}-1}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-1}{\cos(\frac{\pi x}{2})}.$$

Primero, haciendo el cambio $u = x^2-1$ tenemos que

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{ax^2-a}-1}{x^2-1} = \lim_{u\to 0} \frac{e^{au}-1}{u} = a.$$

**(0.7 puntos)**

Para el segundo límite notemos que

$$\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right).$$

Así, haciendo el cambio $u = x-1$, se tiene que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\cos(\frac{\pi x}{2})} = -\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\sin(\frac{\pi(x-1)}{2})} = -\lim_{u\to 0} \frac{u(u+2)}{\sin(\frac{\pi u}{2})} = \frac{-4}{\pi}.$$

**(1 punto)**

Finalmente, cómo ambos límites existen tenemos que

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{ax^2-a}-1}{\cos(\frac{\pi x}{2})} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{ax^2-a}-1}{x^2-1} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\cos(\frac{\pi x}{2})} = \frac{-4a}{\pi}.$$

**(0.3 puntos)**

(b) Usando la caracterización $\varepsilon - \delta$ del límite de funciones, demostrar que

$$\lim_{x\to 0^+} (x^2 - 5\ln(1+x)) = 0.$$

**Solución:** Debemos probar que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < x \leq \delta \Rightarrow |x^2 - 5\ln(1+x)| \leq \varepsilon$.

Dado $\varepsilon > 0$ fijo, tomemos $\delta \leq 1$ y $0 < x \leq \delta$. Así, usando que $0 \leq \ln(1+x) \leq x$ si $x \geq 0$, vemos que

$$\begin{aligned} |x^2 - 5\ln(1+x)| &\leq |x|^2 + 5|\ln(1+x)| \\ &= x^2 + 5\ln(1+x) && \textbf{(0.5 puntos)} \\ &\leq x^2 + 5x && \textbf{(0.5 puntos)} \\ &\leq \delta(\delta+5) \leq 6\delta && \textbf{(0.5 puntos)} \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos que $\delta + 5 \leq 6$ ya que $\delta \leq 1$. (La última desigualdad se puede acotar de muchas otras formas).

Luego basta tomar $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{6}\}$ para concluir la demostración. **(0.5 puntos)**

**P2.** (a) Pruebe que para todo $x > 0$ y para todo entero positivo $n$, se tiene que

$$\exp(x) > \frac{x^n}{n^n}.$$

**Solución:** Usando la desigualdad fundamental de la exponencial vemos que

$$\exp(x) = \left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n \geq \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n > \frac{x^n}{n^n}.$$

**(1 punto)**

(b) Utilice la parte anterior para probar que si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ es un polinomio, entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0.$$

**Solución:** Por la parte anterior, para $x > 0$ se tiene que $e^x > \frac{x^{2n}}{(2n)^{2n}}$ y así

$$0 \leq \frac{1}{e^x} < \frac{(2n)^{2n}}{x^{2n}}.$$

De esta forma, para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$ y $x > 0$,

$$0 \leq \frac{x^i}{e^x} \leq \frac{(2n)^{2n}}{x^{2n-i}}$$

(se pueden usar otras desigualdades similares usando la parte (a)) **(0.5 puntos)** y por lo tanto $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^i}{e^x} = 0$. **(0.5 puntos)**

Finalmente, usando álgebra de límites,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{e^x} = a_n \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} + \ldots + a_0 \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{x^0}{e^x} = 0.$$

**(1 punto)**

(c) Hallar, si existen, las asíntotas de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ \\ \frac{5x^{100}}{e^{x/2}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

**Solución:**

- **Asíntotas horizontales:** Primero calculamos el límite cuando $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-1} = 1.$$

**(0.8 puntos)**

Para $x \to +\infty$ tenemos que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^{100}}{e^{x/2}} = 0$$

por la parte anterior. **(0.8 puntos)**

Luego, las rectas $y = 0$ e $y = 1$ son asíntotas horizontales de $f$. **(0.4 puntos)**

- **Asíntotas oblicuas:** Como $f(x)$ tiene asíntotas horizontales cuando $x \to \pm\infty$, entonces no posee asíntotas oblicuas. **(0.3 puntos)**
- **Asíntotas verticales:** La única asíntota vertical es $x = 1$ ya que

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty$$

pues $\lim_{x\to1^-}(x-1) = 0^-$. **(0.7 puntos)**