CONTROL 6

P1. a) **(2 puntos)** Determine el valor de $\lim_{x\to 1} (1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

b) **(4 puntos)** Determine los valores de las constantes $a, b \in \mathbb{R}$ de tal forma que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left((1+a)x^2\right)}{1-\cos(x)} & \text{si } x < 0 \\ b & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^{ax}-1}{\ln\left(\frac{x}{4}+1\right)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

P2. a) **(1 punto)** Demuestre que $\exp\left(-\frac{1}{x}\right) \leq \frac{x}{x+1}$ para $x > 0$.

b) **(1 punto)** Use el Teorema del Sandwich apropiadamente para demostrar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0$$

c) **(4 puntos)** Use el resultado de la parte b) para hallar, si existen, las asíntotas de la función

$$f(x) = \frac{x\exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) + 3x^3}{x^2-1}$$

Indicación: Puedes usar el siguiente resultado sin demostrarlo.
Sean $a, L \in \mathbb{R}$ y $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty$.

- $\lim_{x\to a^+} [f(x) + g(x)] = +\infty$
- Si $L > 0$, entonces $\lim_{x\to a^+} f(x)g(x) = +\infty$.

El resultado también es válido si se reemplaza a^+ por a^- o si se reemplaza $+\infty$ por $-\infty$.

Tiempo: 1:30h