Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1002: Cálculo Diferencial e Integral. 2024-1

Control Recuperativo

Instrucciones

- *El siguiente enunciado contiene tres preguntas, cada una correspondiente a cada uno de los tres controles del curso.*
- *Debe responder solo la pregunta correspondiente a la sala en la que se encuentra.*

C1. a) Considere la función $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in (-1,0) \cup (0,1), \\ -1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

i) **(1,5 pts.)** Demuestre que f es continua y derivable en $\bar{x} = 0$, y calcule $f'(0)$.

ii) **(1,5 pts.)** Justifique que f es derivable en todo su dominio y calcule su derivada.

b) **(3,0 pts.)** Sea $\alpha \in (0,1)$. Pruebe que, para todo $x \in [0,1)$, se cumple que

$$x^\alpha \leq \alpha x + (1-\alpha).$$

Indicación: Defina $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \alpha x - x^\alpha$ y use el teorema del valor medio en el intervalo $[t,1]$ para $t \in [0,1)$ adecuado.

C2. a) Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^3 e^x.$$

i) **(1,0 pto.)** Estudie la derivabilidad de f, calcule f' donde f sea derivable y encuentre todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f'(\bar{x}) = 0$.

ii) **(1,0 pto.)** Encuentre los intervalos (si los hay) donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos mínimos y máximos, locales y globales, de f.

iii) **(1,0 pto.)** Determine dónde f es dos veces derivable, calcule f'' allí, y calcule todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f''(\bar{x}) = 0$.

iv) **(1,0 pto.)** Determine los intervalos donde f es convexa y donde es cóncava (si los hay).

b) **(2,0 pts.)** Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $\alpha > 0$, considere

$$I_n = \int t^\alpha \big(\ln(t)\big)^n \, dt.$$

Integrando por partes adecuadamente, muestre que, para cada $n \geq 2$,

$$I_n = \frac{t^{\alpha+1}\big(\ln(t)\big)^n}{\alpha+1} - \left(\frac{n}{\alpha+1}\right) I_{n-1}.$$

C3. a) Suponga que la función $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable y satisface la ecuación

$$x = \int_1^{y(x)} \exp\left(x - t^2\right)\,\mathrm{d}t,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

i) **(1,5 pts.)** Demuestre que $y(0) = 1$.

ii) **(1,5 pts.)** Demuestre que $y'(0) = \exp(1)$.
<u>Indicación:</u> Recuerde y use las propiedades de la función exponencial. Además, puede usar sin demostración que $\left(\int_{u(x)}^{v(x)} h(t)\,\mathrm{d}t\right)' = h(v(x))v'(x) - h(u(x))u'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, toda función continua h, y todas funciones derivables u, v.

b) Considere la función $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Para $a > 1$, considere la región bajo la curva f en el intervalo $[1, a]$, es decir,

$$\mathcal{R}_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x \in [1, a], y \in [0, f(x)]\}.$$

i) **(0,5 pts.)** Calcule el volumen V_a del sólido de revolución obtenido al rotar la región $\mathcal{R}_a$ en torno al eje horizontal.

ii) **(1,5 pts.)** Calcule la superficie S_a del manto del sólido de revolución obtenido al rotar la región $\mathcal{R}_a$ en torno al eje horizontal.
<u>Indicación:</u> Puede serle útil usar que, si $x > 0$, entonces $(\ln(\sqrt{x^2+1} + x))' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

iii) **(1,0 pto.)** Concluya que $\lim\limits_{a\to\infty} V_a$ existe, pero que $\lim\limits_{a\to\infty} S_a$ diverge.

Formulario C3

Área de la región entre la curva definida por f y el eje horizontal ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable)	$\int_a^b \lvert f(x)\rvert dx$
Volumen de un sólido de área transversal A ($A\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable)	$\int_a^b A(x)dx$
Volumen del sólido de revolución obtenido rotando la región entre la curva definida por f y el eje horizontal, en torno al eje horizontal ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ no negativa e integrable)	$\pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2 dx$
Volumen del sólido de revolución obtenido rotando la región entre la curva definida por f y el eje horizontal, en torno al eje vertical ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable, con $a \geq 0$)	$2\pi \int_a^b xf(x)dx$
Longitud del arco de curva definido por f ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ de clase C^1)	$\int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2} dx$
Superficie del manto del sólido de revolución obtenido rotando la región entre la curva definida por f y el eje horizontal, en torno al eje horizontal ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ no negativa y de clase C^1)	$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2} dx$
Área de la región encerrada por la curva definida en coordenadas polares por $r = f(\phi)$ ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ no negativa, integrable, con $b - a \leq 2\pi$)	$\frac{1}{2} \int_a^b \big(f(\phi)\big)^2 d\phi$

<u>**Si usa un teorema, no olvide verificar explícitamente cada una de sus hipótesis.**</u>

Duración: 2h.