Control 3

P1. a) Calcule las siguientes integrales

i) **(1,0 pto.)** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{x\cos(x^2)}{2+\operatorname{sen}^2(x^2)}\,\mathrm{d}x$ ii) **(2,0 pts.)** $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{1}{3+5\cos(x)}\,\mathrm{d}x$

b) **(3,0 pts.)** Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Muestre que

$$\int_0^{\pi} x f(\operatorname{sen}(x))\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen}(x))\,\mathrm{d}x.$$

Indicación: Use un cambio de variables $t = \pi - x$ en las integrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(\operatorname{sen}(x))\,\mathrm{d}x$ y $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen}(x))\,\mathrm{d}x$ junto con la aditividad horizontal de la integral. Recuerde además que $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

P2. a) **(3,0 pts.)** Considere la función $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\int_0^{\int_0^x e^{-s^2}ds} \operatorname{sen}(y^2)\,\mathrm{d}y\right).$$

Calcule $f'(x)$ y muestre que

$$f'(x) = \cos\left(\int_0^{\int_0^x e^{-s^2}ds} \operatorname{sen}(y^2)\,\mathrm{d}y\right) \operatorname{sen}\left(\left(\int_0^x e^{-s^2}\,\mathrm{d}s\right)^2\right) e^{-x^2} \text{ para todo } x > 0.$$

Indicación: Puede usar sin demostración que $\left(\int_{u(x)}^{v(x)} h(t)\,\mathrm{d}t\right)' = h(v(x))v'(x) - h(u(x))u'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, toda función continua h, y todas funciones derivables u, v.

b) **(3,0 pts.)** Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Considere F y G funciones definidas por

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ y } G(x) = \int_0^x f(t^2)\,\mathrm{d}t.$$

Demuestre que, para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^a G(x)\,\mathrm{d}x = aG(a) - \frac{1}{2}F(a^2).$$

Indicación: Puede ser útil estudiar la derivada de $H(a) = \int_0^a G(x)\,\mathrm{d}x - aG(a) + \frac{1}{2}F(a^2)$, y recordar que las únicas funciones derivables con derivada nula son las funciones constantes.

P3. a) **(1,5 pts.)** Considere la región $\mathcal{R}$ en el primer cuadrante, acotada por la izquierda por el eje vertical, por abajo por la curva $x = 2\sqrt{y}$, arriba a la izquierda por la curva $x = (y-1)^2$ (con $y \geq 1$), y arriba a la derecha por $x = 3 - y$ (vea la Figura 1). Calcule el área de la región $\mathcal{R}$.
Indicación: Calcule explícitamente los puntos (x, y) de intersección de las curvas para explicar su planteamiento mediante integrales.

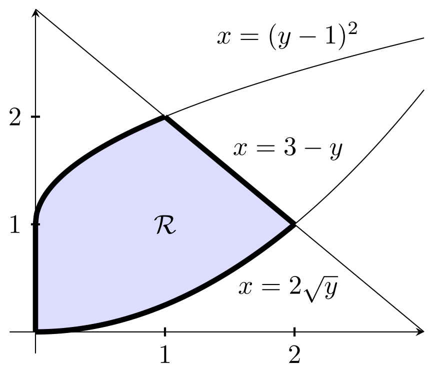

Figura 1: Esquema de la región $\mathcal{R}$.

b) **(1,5 pts.)** Considere las funciones $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ y $g\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 2\sqrt{4-x}$ y $g(x) = x - 1$. Sea $\mathcal{R}$ la región del primer cuadrante encerrada bajo ambas funciones, es decir:

$$\mathcal{R} = \Big\{(x,y) \ \mid \ x \in [1,4],\ 0 \leq y \leq \min\{f(x), g(x)\}\Big\},$$

como muestra la Figura 2. Calcule el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje horizontal.
Indicación: Calcule explícitamente los puntos de intersección (x, y) de las curvas para explicar su planteamiento mediante integrales.

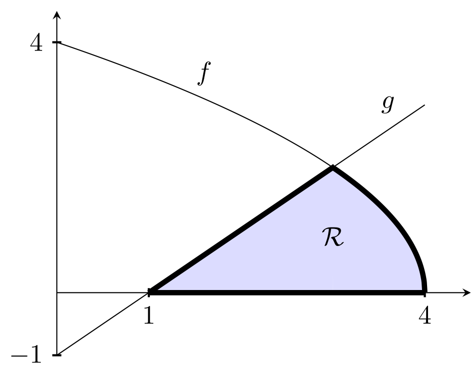

Figura 2: Esquema de la región $\mathcal{R}$.

c) **(3,0 pts.)** Considere la *espiral de Arquímedes* definida en coordenadas polares por la ecuación $r = \phi$, para $\phi \in [0, 4\pi]$, (dos vueltas completas).
Calcule el área de la región encerrada entre la primera y segunda vuelta de esta curva. Es decir, el área de la región sombreada en la Figura 3.

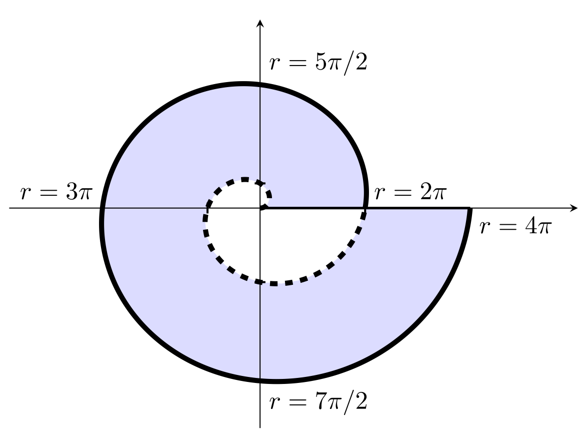

Figura 3: La Espiral de Arquímedes. La primera vuelta ($r \in [0, 2\pi]$) se ilustra con una línea punteada, y la segunda vuelta ($r \in [2\pi, 4\pi]$), con una línea sólida. Algunos valores de r están indicados para la segunda vuelta.

Formulario	Área de la región entre la curva definida por f y el eje horizontal ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable)	$\int_a^b \lvert f(x)\rvert dx$
	Volumen de un sólido de área transversal A ($A\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable)	$\int_a^b A(x)dx$
	Volumen del sólido de revolución obtenido rotando la región entre la curva definida por f y el eje horizontal, en torno al eje horizontal ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ no negativa e integrable)	$\pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2 dx$
	Volumen del sólido de revolución obtenido rotando la región entre la curva definida por f y el eje horizontal, en torno al eje vertical ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable, con $a \geq 0$)	$2\pi \int_a^b x f(x) dx$
	Longitud del arco de curva definido por f ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ de clase C^1)	$\int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2} dx$
	Superficie del manto del sólido de revolución obtenido rotando la región entre la curva definida por f y el eje horizontal, en torno al eje horizontal ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ no negativa y de clase C^1)	$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2} dx$
	Área de la región encerrada por la curva definida en coordenadas polares por $r = f(\phi)$ ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ no negativa, integrable, con $b - a \leq 2\pi$)	$\frac{1}{2} \int_a^b \big(f(\phi)\big)^2 d\phi$

Si usa un teorema, no olvide verificar explícitamente cada una de sus hipótesis.

Duración: 3h.