Pauta Control 5

P1. Considere la sucesión (x_n) definida por recurrencia

$$x_{n+1} := \sqrt{\frac{8+x_n^2}{3}}, \quad x_0 = 10.$$

(a) **(2.0 pts)** Muestre que $x_n \geq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución

Por inducción:

- **Caso base:** Para $n = 0$, $x_0 = 10 \geq 2$. También puede tomarse como caso base $n = 1$ $x_1 = \sqrt{\frac{8+10^2}{3}} = 6 \geq 2$. 0.5
- **Hipótesis de inducción (H.I.):** Supongamos que para $n = k$ se verifica que $x_k \geq 2$. 0.5
- Suponiendo cierta **(H.I.)**

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \sqrt{\frac{8+x_k^2}{3}} \\ &\geq \sqrt{\frac{8+(2)^2}{3}}, \quad \textbf{(H.I.)} \\ &= \sqrt{4} = 2, \end{aligned}$$

lo que prueba que $x_{k+1} \geq 2$, luego el resultado se sigue por el principio de inducción. 1.0

(b) **(2.0 pts)** Muestre que (x_n) es monótona.

Solución 1

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sqrt{\frac{8+x_n^2}{3}}}{x_n} = \sqrt{\frac{8}{3x_n^2} + \frac{1}{3}},$$

0.5

como $x_n \geq 2 > 0$ entonces $x_n^2 \geq 4$, así $\frac{1}{4} \geq \frac{1}{x_n^2}$, luego

$$\frac{2}{3} \geq \frac{8}{3x_n^2} \iff \frac{8}{3x_n^2} \leq \frac{2}{3},$$

0.5

entonces

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \sqrt{\frac{8}{3x_n^2} + \frac{1}{3}} \leq \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} = 1.$$

0.5

Concluimos que $x_{n+1} \leq x_n$, así que (x_n) es decreciente. 0.5

Otra solución para P1 (b) Racionalizando $x_{n+1} - x_n$

$$x_{n+1}-x_n = \sqrt{\frac{8+x_n^2}{3}}-x_n = \left(\sqrt{\frac{8+x_n^2}{3}} - x_n\right)\frac{\sqrt{\frac{8+x_n^2}{3}}+x_n}{\sqrt{\frac{8+x_n^2}{3}}+x_n} = \frac{\frac{8+x_n^2}{3} - x_n^2}{\sqrt{\frac{8+x_n^2}{3}}+x_n} = \frac{\frac{8-2x_n^2}{3}}{\sqrt{\frac{8+x_n^2}{3}}+x_n}$$

1.0

como $x_n \geq 2 > 0$ entonces $x_n^2 \geq 4$, luego $8 - 2x_n^2 \leq 0$. 0.5

Así que $x_{n+1} \leq x_n$ entonces (x_n) es decreciente. 0.5

(c) **(2.0 pts)** Usando lo anterior concluya que (x_n) converge y calcule su límite.

Solución Dado que la sucesión (x_n) es decreciente y acotada inferiormente entonces converge. 0.5

Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{8+x_n^2}{3}},$$

entonces

$$\ell = \sqrt{\frac{8+\ell^2}{3}},$$

0.5

luego

$$\ell^2 = \frac{8+\ell^2}{3},$$

por tanto $\ell^2 = 4$, luego $\ell = 2$ ó $\ell = -2$, esta última solución se descarta pues $x_n \geq 2$ así que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq 2$. 0.5

Finalmente, concluimos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. 0.5

P2. (a) **(3.0 pts)** Muestre que $c_n := \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ converge.

Indicación: calcular $\dfrac{c_n}{c_{n+1}}$.

Solución

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}}{\frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}} = \frac{(2n)!2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}{2^{2n}(n!)^2(2(n+1))!} = \frac{(2n)!2((n+1)!)^2}{(2n+2)!(n!)^2},$$

0.5

así

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = 2\frac{(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}\left(\frac{(n+1)n!}{n!}\right)^2 = \frac{2(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{2(n+1)}{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+1}$$

0.5

luego

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{\geq 0} \geq 1,$$

0.5

entonces $c_n \geq c_{n+1}$, luego la sucesión (c_n) es decreciente. 0.5

Como $c_n \geq 0$ entonces (c_n) es acotada inferiormente. 0.5

Concluimos que converge por ser decreciente y acotada inferiormente. 0.5

(b) Calcule los siguientes límites

i. **(1.0 pts)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 a^n - n b^n}{n^5 a^n + \sqrt{n^2+1}\, b^n}$ con $0 < a < b$.

Solución Dividiendo entre nb^n numerador y denominador tenemos

$$\frac{n^3 a^n - n b^n}{n^5 a^n + \sqrt{n^2+1}\, b^n} = \frac{n^2 \left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{n^4 \left(\frac{a}{b}\right)^n + \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}} = \frac{n^2 \left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{n^4 \left(\frac{a}{b}\right)^n + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}.$$

0.4

Notamos que $q = \frac{a}{b}$ cumple $|q| = \frac{a}{b} < 1$ y por tanto $n^4 q^n \to 0$ y $n^2 q^n \to 0$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} n^4 \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} n^2 \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0,$$

0.4

como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, usando álgebra de límites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 a^n - n b^n}{n^5 a^n + \sqrt{n^2+1}\, b^n} = \frac{0-1}{0+\sqrt{1+0}} = -1.$$

0.2

ii. **(1.0 pts)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} - \sqrt{n + \sqrt[n]{3 - \frac{1}{n}}} \right) \sqrt{n + 2^{-n}}.$

Solución Racionalizando

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} - \sqrt{n + \sqrt[n]{3 - \frac{1}{n}}} \right) \sqrt{n + 2^{-n}} \\
&= \frac{n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(n + \sqrt[n]{3 - \frac{1}{n}}\right)}{\sqrt{n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} + \sqrt{n + \sqrt[n]{3 - \frac{1}{n}}}} \sqrt{n + 2^{-n}} \\
&= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \sqrt[n]{3 - \frac{1}{n}}}{\sqrt{n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} + \sqrt{n + \sqrt[n]{3 - \frac{1}{n}}}} \sqrt{n + 2^{-n}},
\end{aligned}$$

0.2

tomando $\sqrt{n}$ como factor obtenemos que lo anterior es igual a

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \sqrt[n]{3-\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} + \sqrt{1+\frac{1}{n}\sqrt[n]{3-\frac{1}{n}}}\right)}\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n2^n}}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \sqrt[n]{3-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} + \sqrt{1+\frac{1}{n}\sqrt[n]{3-\frac{1}{n}}}}\sqrt{1+\frac{1}{n2^n}}.$$

0.2

Como $\lim\limits_{n\to\infty} 3-\dfrac{1}{n} = 3 > 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3-\dfrac{1}{n}} = 1$, además 0.1

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$

0.2

luego

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 0 \ \text{ y } \ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{3-\frac{1}{n}} = 0.$$

0.1

Finalmente, dado que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n2^n} = 0$ 0.1

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} - \sqrt{n+\sqrt[n]{3-\frac{1}{n}}}\right)\sqrt{n+2^{-n}}$$

$$=\frac{e-1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}\sqrt{1+0}$$

$$=\frac{e-1}{2}.$$

0.1

iii. **(1.0 pts)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n\sin(n^2)+3^n}{2n^3+3^{n+1}}\right)^n$.

Solución Para $q_n = \dfrac{n\sin(n^2)+3^n}{2n^3+3^{n+1}}$, dividimos numerador y denominador entre 3^n

$$q_n = \frac{n\sin(n^2)+3^n}{2n^3+3^{n+1}} = \frac{\dfrac{n\sin(n^2)}{3^n}+1}{\dfrac{2n^3}{3^n}+3} = \frac{n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\sin(n^2)+1}{2n^3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+3},$$

0.2

como $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ y $\sin(n^2)$ es acotada, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n\sin(n^2) = 0,$$

0.2

además $\lim_{n\to\infty} n^3\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, entonces usando el álgebra de límites

0.2

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\frac{1}{3}\right)^n \sin(n^2)+1}{2n^3\left(\frac{1}{3}\right)^n+3} = \frac{0+1}{2(0)+3} = \frac{1}{3},$$

0.2

como $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} (q_n)^n = 0,$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n\sin(n^2)+3^n}{2n^3+3^{n+1}}\right)^n = 0.$$

0.2

Tiempo: 1:30 horas.