Pauta de corrección Control 2

P1. i) Considere la función $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-3/2\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x+3}$$

a) **(2,0 pts.)** Estudie la derivabilidad de f, calcule f' donde f sea derivable y encuentre todos los puntos $\bar{x} \in \mathrm{Dom}(f)$ donde $f'(\bar{x}) = 0$.

Solución

Se tiene que f es derivable en todo su dominio por álgebra y composición de funciones derivables. Más precisamente, el numerador es derivable al ser la composición de la función exponencial con un polinomio, y el denominador es derivable al ser un polinomio. Más aún, el denominador nunca se anula en el dominio de f.

(0,5 pts. por justificar que f es derivable)

Usando las reglas de cálculo, se encuentra entonces f':

$$f'(x) = \left(\frac{e^{-x^2}}{2x+3}\right)' = \frac{(e^{-x^2})'\cdot(2x+3) - (2x+3)'\cdot e^{-x^2}}{(2x+3)^2}$$

(0,2 pts. por aplicar la Regla del cociente)

$$= \frac{e^{-x^2}\cdot(-2x)\cdot(2x+3) - 2\cdot e^{-x^2}}{(2x+3)^2}$$ **(0,3 pts. por realizar las derivadas de cada expresión)**

$$= \frac{e^{-x^2}((-2x)\cdot(2x+3) - 2)}{(2x+3)^2}$$

$$= -\frac{2e^{-x^2}(2x^2+3x+1)}{(2x+3)^2}.$$ **(0,3 pts. por simplificar)**

Ahora, si $\bar{x} \in \mathrm{Dom}(f)$ cumple $f'(\bar{x}) = 0$, se tiene que $2\bar{x}^2 + 3\bar{x} + 1 = 0$, ya que todos los demás factores de la expresión para $f'(\bar{x})$ son no nulos.

(0,3 pts. por imponer que $f'(\bar{x}) = 0$ y descartar los factores no nulos)

Así,

$$\bar{x} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3\pm 1}{4}$$

(0,2 pts. por resolver correctamente la ecuación cuadrática)

de donde se obtiene que $\bar{x} \in \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$.

(0,2 pts. por entregar el resultado)

b) **(1,0 pts.)** Encuentre los intervalos (si los hay) donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos de mínimos y máximos, locales y globales, de f.

Solución

Para determinar dónde f es creciente y dónde es decreciente, se debe analizar el signo de su derivada. De la parte anterior, para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$ se tiene que el signo de $f'(x)$ coincide con el signo del polinomio $P(x) = -(2x^2+3x+1)$, ya que todos los demás factores que aparecen en la expresión de $f'(x)$ son positivos. Así, se debe analizar cuándo el polinomio P es positivo y cuándo es negativo.

(0,2 pts. por concluir que se debe analizar un polinomio)

En la parte anterior también se encontró que las únicas raíces de P son $\bar{x} = -1$ y $\bar{x} = -\frac{1}{2}$ **(0,1 pts. por**

encontrar las raíces del polinomio). Por lo tanto, P tiene signo constante en los intervalos $(-\infty, -1)$, $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ **(0,1 pts. por determinar los intervalos que se deben analizar)**. Basta evaluar en un punto de estos intervalos para determinar el signo. Por ejemplo,

$$P(-2) = -3 \implies P(x) < 0 \text{ para todo } x \in (-\infty, -1) \implies f'(x) < 0 \text{ para todo } x \in (-\infty, -1) \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$
$$P(-3/4) = \frac{1}{8} \implies P(x) > 0 \text{ para todo } x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \implies f'(x) > 0 \text{ para todo } x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$$
$$P(0) = -1 \implies P(x) < 0 \text{ para todo } x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \implies f'(x) < 0 \text{ para todo } x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Alternativa

También se puede argumentar que P es un polinomio cuadrático con coeficiente líder (asociado a x^2) negativo, por lo que es positivo en el intervalo entre sus raíces, y negativo en el resto de los números reales.

Se obtiene de esta manera la siguiente tabla de crecimiento para f:

	$-\infty$ a $-3/2$	$-3/2$ a -1	-1 a $-1/2$	$-1/2$ a $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Tabla 1: Tabla de crecimiento de f.

Con lo cual se concluye que f es:

a) decreciente en $(-\infty, -3/2)$
b) decreciente en $(-3/2, -1]$
c) creciente en $[-1, -1/2]$
d) decreciente en $[-1/2, +\infty)$

(0,2 pts. por encontrar el signo de f' y concluir sobre la monotonía de f)

Finalmente, se determinará si los puntos críticos de f son mínimos o máximos, locales o globales. Los únicos puntos críticos son $\bar{x} = -1$ y $\bar{x} = -\frac{1}{2}$. En $\bar{x} = -1$, f pasa de ser decreciente a ser creciente, por lo que $\bar{x} = -1$ es un mínimo local. Por otro lado, en $\bar{x} = -\frac{1}{2}$, f pasa de ser creciente a ser decreciente, por lo que es un máximo local.

(0,2 pts. por justificar que $\bar{x} = -1$ es mínimo local y que $\bar{x} = -\frac{1}{2}$ es máximo local)

Alternativa

También se puede calcular la segunda derivada de f para obtener que $f''(-1) = 1 > 0$ y $f''\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 < 0$, por lo que $\bar{x} = -1$ corresponde a un mínimo local, y $\bar{x} = -\frac{1}{2}$, a un máximo local.

Por otro lado, f tiene una asíntota vertical en $\bar{x} = -\frac{3}{2}$. Como el numerador de la expresión de f es siempre positivo, el signo de f depende solo de su denominador, que cambia justamente al pasar por $\bar{x} = -\frac{3}{2}$. Esto muestra que

$$\lim_{x \to (-3/2)^-} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to (-3/2)^+} f(x) = +\infty.$$

Se concluye entonces que f no es acotada ni inferior ni superiormente y, por lo tanto, que no tiene un mínimo o máximo global.

(0,2 pts. por concluir que f no tiene mínimo ni máximo global)

ii) **(3,0 pts.)** Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función infinitamente derivable. Suponga que existe $r > 0$ tal que $|f^{[k]}(x)| \leq r$, para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$. Considere $\bar{x}, x_0 \in \mathbb{R}$ fijos con $\bar{x} < x_0$. Demuestre que

$$\lim_{k \to \infty} |f(x_0) - T_f^k(x_0 - \bar{x})| = 0,$$

donde $T_f^k(x_0-\bar{x})$ denota el polinomio de Taylor de orden k en torno a $\bar{x}$ evaluado en x_0.

Indicación: Recuerde que $\lim_{n\to\infty} \frac{t^n}{n!} = 0$, para cualquier $t \in \mathbb{R}$.

Solución

Como f es infinitamente derivable, se puede usar la fórmula de Taylor para orden k. Así, existe $\xi \in (\bar{x}, x_0)$ tal que

$$f(x_0) = T_f^k(x_0-\bar{x}) + \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k+1)!}(x_0-\bar{x})^{k+1}.$$

(0,6 pts. por escribir la fórmula de Taylor)

De aquí, se obtiene que

$$|f(x_0) - T_f^k(x_0-\bar{x})| = \left|\frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k+1)!}(x_0-\bar{x})^{k+1}\right| = \frac{|f^{[k+1]}(\xi)|}{(k+1)!}(x_0-\bar{x})^{k+1}.$$

(0,5 pts. por encontrar esta expresión para $|f(x_0) - T_f^k(x_0-\bar{x})|$)

Usando la hipótesis, resulta que $|f^{[k+1]}(\xi)| \leq r$. Se concluye entonces que

$$0 \leq |f(x_0) - T_f^k(x_0-\bar{x})| \leq \frac{r}{(k+1)!}(x_0-\bar{x})^{k+1}. \tag{1}$$

(0,5 pts. por acotar $|f(x_0) - T_f^k(x_0-\bar{x})|$ usando la hipótesis)

Tomando límite con $k \to \infty$ en la expresión de la derecha, se llega a

$$\lim_{k\to\infty} \frac{r}{(k+1)!}(x_0-\bar{x})^{k+1} = r \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{(x_0-\bar{x})^{k+1}}{(k+1)!} = r \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(x_0-\bar{x})^n}{n!} = r \cdot 0 = 0,$$

(0,6 pts. por obtener el valor del límite de la expresión del lado derecho en (1))

donde se hizo el cambio de variable $n = k+1$ y luego se usó que $\lim_{n\to\infty} \frac{(x_0-\bar{x})^n}{n!} = 0$ aplicando la indicación con $t = x_0 - \bar{x}$.

(0,3 pts. por justificar el uso del límite de la indicación en la última igualdad)

Combinando este resultado y el teorema del sandwich aplicado a (1), se obtiene lo deseado.

(0,5 pts. por argumentar que $|f(x_0) - T_f^k(x_0-\bar{x})| \to 0$ cuando $k \to \infty$)

P2. i) Cálcule las siguientes primitivas:

a) **(1,5 pts.)** $\int \operatorname{sen}(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

Solución

Se denotará a la primitiva buscada por I. Se comienza usando el cambio de variable

$$t = \sqrt{x},$$

(0,2 pts. por mencionar el cambio de variable)

de donde $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. La primitiva queda

$$I = 2\int t\operatorname{sen}(t)\,\mathrm{d}t.$$

(0,3 pts. por realizar la sustitución de manera correcta)

Esta primitiva se puede calcular usando integración por partes con

$$\begin{aligned} u &= t & \mathrm{d}u &= \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v &= \operatorname{sen}(t)\mathrm{d}t & v &= -\cos(t), \end{aligned}$$

(0,3 pts. por definir de manera correcta u, $\mathrm{d}u$, v y $\mathrm{d}v$)

obteniendo

$$I = -2t\cos(t) + 2\int \cos(t)dt.$$

(0,2 pts. por realizar la integración de manera correcta)

Por lo cual

$$I = -2t\cos(t) + 2\,\mathrm{sen}(t) + C.$$

(0,2 pts. por realizar la integración de $\int \cos(t)\,\mathrm{d}t$ de manera correcta)

Finalmente, volviendo a la variable original queda

$$\int \mathrm{sen}(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = 2\left(\mathrm{sen}(\sqrt{x}) - \sqrt{x}\cos(\sqrt{x})\right) + C.$$

(0,3 pts. por dejar la primitiva en términos de la variable original)

b) **(1,5 pts.)** $\displaystyle\int \frac{1}{2+3\cos(x)}\,\mathrm{d}x$

Solución

Se usa la sustitución de Weierstrass $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Con esta sustitución resulta que

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{y} \quad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

(0,2 pts. por mencionar el cambio de variable)

Así, la primitiva queda

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2+3\cos(x)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2+3\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\int \frac{1}{2(1+t^2)+3(1-t^2)}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int \frac{1}{5-t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{1}{(\sqrt{5}-t)(\sqrt{5}+t)}\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{2}$$

(0,3 pts. por realizar la sustitución)

Se usará el método de fracciones parciales para separar esta primitiva como una suma. Se plantea la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{(\sqrt{5}-t)(\sqrt{5}+t)} = \frac{A}{\sqrt{5}-t} + \frac{B}{\sqrt{5}+t} = \frac{A(\sqrt{5}+t)+B(\sqrt{5}-t)}{(\sqrt{5}-t)(\sqrt{5}+t)},$$

(0,2 pts. por usar el método de fracciones parciales)

de donde resulta la igualdad de polinomios

$$A(\sqrt{5}+t) + B(\sqrt{5}-t) = 1. \tag{3}$$

(0,1 pts. por obtener la ecuación que relaciona las constantes A y B)

Para encontrar A y B se pueden usar (al menos) tres métodos:

Primera forma (Igualando coeficientes)

De la igualdad (3) resulta que $(A-B)t + \sqrt{5}(A+B) = 1$. Como esta es una igualdad de polinomios, debe ser válida para todos los coeficientes. De aquí se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A - B &= 0 \\ \sqrt{5}(A+B) &= 1. \end{aligned}$$

La primera ecuación muestra que $A = B$. Sustituyendo en la segunda ecuación, resulta que $2\sqrt{5}A = 1$, por lo que se obtiene que $A = B = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$.

(0,2 pts. por obtener los valores de A y B)

Segunda forma (Evaluando)

Como (3) es una igualdad de polinomios, es válida evaluando en cualquier $t \in \mathbb{R}$ (o incluso $t \in \mathbb{C}$). Evaluando (por ejemplo) en $t = \sqrt{5}$ y en $t = -\sqrt{5}$ se obtiene el sistema de ecuaciones

$$2\sqrt{5}A = 1$$
$$2\sqrt{5}B = 1$$

de donde se concluye que $A = B = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$.

(0,2 pts. por obtener los valores de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$)

Tercera forma (Por inspección)

Dado que los factores del denominador son simétricos, es fácil encontrar los coeficientes A y B:

$$\frac{1}{\sqrt{5}-t} + \frac{1}{\sqrt{5}+t} = \frac{2\sqrt{5}}{(\sqrt{5}-t)(\sqrt{5}+t)}.$$

Luego $A = B = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$.

(0,2 pts. por obtener los valores de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$)

Resulta así que

$$\frac{1}{(\sqrt{5}-t)(\sqrt{5}+t)} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}-t}\right) + \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}+t}\right).$$

Volviendo a (2), se obtiene de este modo que

$$\int \frac{1}{2+3\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{\sqrt{5}-t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{\sqrt{5}+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\ln|\sqrt{5}-t| + \ln|\sqrt{5}+t|) + C.$$

(0,2 pts. por calcular la primitiva)

Finalmente, volviendo a la variable original queda

$$\int \frac{1}{2+3\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\ln\left|\sqrt{5}+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| - \ln\left|\sqrt{5}-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right) + C.$$

(0,3 pts. por dejar la primitiva en términos de la variable original)

ii) **(3,0 pts.)** Para $a > 0$ y $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ considere

$$I_n = \int \frac{1}{(a^2+x^2)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Integrando por partes adecuadamente, muestre que, para cada $n \geq 2$, se tiene que

$$I_n = \int \frac{1}{(a^2+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2a^2(n-1)\,(a^2+x^2)^{n-1}} + \left(\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}\right) I_{n-1}.$$

Use lo anterior para calcular I_2 explícitamente.

<u>Indicación:</u> Puede serle útil que $\dfrac{x^2}{(a^2+x^2)^k} = \dfrac{1}{(a^2+x^2)^{k-1}} - \dfrac{a^2}{(a^2+x^2)^k}$ para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Solución

Primera Forma (Calculando I_n)

Usando la indicación con $k = n$ para despejar $\dfrac{1}{(a^2+x^2)^n}$ se obtiene

$$\frac{1}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}} - \frac{x^2}{(a^2+x^2)^n}\right).$$

Así,

$$\begin{aligned} I_n = \int \frac{1}{(a^2+x^2)^n}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^n}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{a^2}\left(I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^n}\,\mathrm{d}x\right). \end{aligned}$$

(0,5 pts. por usar la indicación en la integral que aparece en I_n)

Se integra por partes la primitiva

$$\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$$

usando

$$\begin{aligned} u &= x & \mathrm{d}u &= \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= \frac{x}{(a^2+x^2)^n}\,\mathrm{d}x & v &= -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}}, \end{aligned}$$

(0,7 pts. por aplicar integración por partes)

para obtener

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^n}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}. \end{aligned}$$

(0,5 pts. por realizar integración por partes)

Remplazando, resulta que

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}\right).$$

Reordenando, se obtiene

$$I_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} + \left(\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}\right) I_{n-1},$$

(0,8 pts. por obtener I_n)

que es justamente lo deseado.

Segunda Forma (Calculando I_{n-1})

Se integra por partes la primitiva

$$I_{n-1} = \int \frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}}\,\mathrm{d}x$$

usando

$$u = \frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}} \qquad \mathrm{d}u = -\frac{2(n-1)x}{(a^2+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x \qquad v = x$$

(0,7 pts. por aplicar integración por partes)

para obtener

$$I_{n-1} = \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} - \int \frac{-2(n-1)x^2}{(a^2+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^n}\,\mathrm{d}x.$$

(0,5 pts. por realizar integración por partes)

Usando la indicación con $k = n$, se obtiene que

$$I_{n-1} = \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \left(\frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}} - \frac{a^2}{(a^2+x^2)^n}\right)\mathrm{d}x = \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + 2(n-1)(I_{n-1} - a^2 I_n).$$

(0,5 pts. por usar la indicación en la integral que aparece en I_{n-1})

Reordenando, resulta que

$$2a^2(n-1)I_n = \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1},$$

(0,5 pts. por reordenar términos)

de donde se puede despejar I_n obteniendo

$$I_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} + \left(\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}\right) I_{n-1},$$

(0,3 pts. por obtener I_n)

que es justamente lo deseado.

Ahora, imponiendo $n = 2$ queda

$$I_2 = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \left(\frac{1}{2a^2}\right) I_1.$$

Como

$$I_1 = \int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C,$$

se obtiene finalmente

$$I_2 = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

(0,5 pts. por obtener I_2)

P3. Para $b \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, sea $f\colon [1,b] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Para $n \in \mathbb{N}$, considere una partición geométrica $P_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[1,b]$, esto es, $x_i = r^i$, con $r = b^{1/n}$, para $i \in \{0, \ldots, n\}$. Sean $f_-, f_+\colon [1,b] \to \mathbb{R}$ las funciones escalonadas asociadas a la partición P_n definidas por

$$f_-(x) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{y} \quad f_+(x) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

para cada $i \in \{1, \ldots, b\}$ y $x \in (x_{i-1}, x_i)$, e iguales a $f(x_i)$ en cada punto x_i de la partición P_n.

a) **(2,0 pts.)** Justifique que $f_- \in \mathcal{E}_-(f)$ y que $f_+ \in \mathcal{E}_+(f)$. Pruebe además que

$$\int_1^b f_- = \frac{n(r-1)}{r} \quad \text{y} \quad \int_1^b f_+ = n(r-1).$$

Solución

Se tiene que f_- y f_+ son funciones escalonadas porque están definidas como constantes en los intervalos abiertos (x_{i-1}, x_i) asociados a una partición **(0,3 pts. por justificar que f_- y f_+ son escalonadas)**. Además, se cumple que $f_- \in \mathcal{E}_-(f)$ y $f_+ \in \mathcal{E}+(f)$ porque el valor constante que toman es justo el ínfimo o supremo, respectivamente, de f en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, que contiene a cada intervalo (x_{i-1}, x_i). Es decir, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, vamos a tener que

$$f_-(x) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \leq f(x) \leq \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f_+(x), \quad \text{para todo } x \in (x_{i-1}, x_i).$$

Más aún en los puntos x_i las funciones f_-, f y f_+ tienen el mismo valor. Con lo cual se concluye que

$$f_-(x) \leq f(x) \leq f_+(x), \quad \text{para todo } x \in [1, b]. \tag{4}$$

(0,5 pts. por probar la desigualdad (4))

Se calculan ahora las integrales de f_- y f_+. Por definición, se tiene que

$$\int_1^b f_- = \sum_{i=1}^n f_-^i \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad \text{y} \quad \int_1^b f_+ = \sum_{i=1}^n f_+^i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

donde f_-^i es el valor constante que toma f_- en el intervalo (x_{i-1}, x_i), y f_+^i es el valor constante que toma f_+ en el intervalo (x_{i-1}, x_i). Como f es decreciente, resulta que

$$f_-^i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_i) = \frac{1}{x_i} = \frac{1}{r^i}$$

(0,3 pts. por notar que $\boldsymbol{\inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_i) = \frac{1}{x_i} = \frac{1}{r^i}}$)

$$f_+^i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_{i-1}) = \frac{1}{x_{i-1}} = \frac{1}{r^{i-1}}.$$

(0,3 pts. por notar que $\boldsymbol{\sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_{i-1}) = \frac{1}{x_{i-1}} = \frac{1}{r^{i-1}}}$)

Por otro lado, se observa que $x_i - x_{i-1} = r^i - r^{i-1} = r^{i-1}(r-1)$. Así,

$$\int_1^b f_- = \sum_{i=1}^n f_-^i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{r^{i-1}(r-1)}{r^i} = \sum_{i=1}^n \frac{r-1}{r} = \frac{n(r-1)}{r}$$

(0,3 pts. por calcular correctamente $\boldsymbol{\int_1^b f_-}$)

$$\int_1^b f_+ = \sum_{i=1}^n f_+^i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{r^{i-1}(r-1)}{r^{i-1}} = \sum_{i=1}^n (r-1) = n(r-1).$$

(0,3 pts. por calcular correctamente $\boldsymbol{\int_1^b f_+}$)

b) **(2,0 pts.)** Justifique que f es Riemann integrable en $[1, b]$ y use los resultados previos para concluir que $\displaystyle\int_1^b f = \ln(b)$.

Indicación: Recuerde que $\lim\limits_{n\to\infty} b^{1/n} = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} n(b^{1/n} - 1) = \ln(b)$.

Solución

La función f es Riemann integrable en $[1,b]$ porque es continua en $[1,b]$ al ser una función racional con denominador que no se anula en todo $[1,b]$.

(0,5 pts. por justificar correctamente que f es Riemann integrable en $[1,b]$)

Alternativa

También se puede argumentar que f es Riemann integrable en $[1,b]$ porque es monótona en $[1,b]$, o porque es decreciente en $[1,b]$.

Alternativa

También se puede hacer todo el cálculo de los límites como se muestra más abajo sin justificar antes que f es Riemann integrable, y luego argumentar que el hecho de que los límites coincidan implica que las integrales inferior y superior coinciden, o que se cumple la condición de Riemann, por lo que f es Riemann integrable.

Se calcula ahora $\int_1^b f$. Por la parte anterior, se cuenta con funciones escalonadas $f_- \in \mathcal{E}_-(f)$ y $f_+ \in \mathcal{E}_+(f)$ tales que

$$\int_1^b f_- = \frac{n(r-1)}{r} \quad \text{y} \quad \int_1^b f_+ = n(r-1).$$

Por definición de la integral de f, esto implica que (recordando que $r = b^{1/n}$)

$$\frac{n(b^{1/n}-1)}{b^{1/n}} \le \int_1^b f \le n(b^{1/n}-1). \tag{5}$$

(0,4 pts. por establecer la desigualdad anterior)

Para continuar se puede razonar de la siguiente manera. Para llegar al resultado, se debe tomar límite con $n \to \infty$ en (5). De aquí,

$$\lim_{n\to\infty} n(r-1) = \lim_{n\to\infty} n(b^{1/n}-1) = \ln(b).$$

(0,3 pts. por establecer el límite anterior)

Por otro lado,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(r-1)}{r} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(b^{1/n}-1)}{b^{1/n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} n(b^{1/n}-1)}{\lim\limits_{n\to\infty} b^{1/n}} = \lim_{n\to\infty} n(b^{1/n}-1) = \ln(b),$$

(0,3 pts. por establecer el límite anterior)

Por lo tanto, al tomar límite $n \to \infty$ en (5) se obtiene

$$\ln(b) \le \int_0^b f \le \ln(b),$$

de donde $\int_0^b f = \ln(b)$.

(0,5 pts. por concluir correctamente el valor de $\int_0^b f$)

Considere también una partición equiespaciada $Q = \{1, \ldots, b\}$ del intervalo $[1,b]$. Sea $g\colon [1,b] \to \mathbb{R}$ la función escalonada asociada a la partición Q definida por

$$g(x) = \sup\{f(x) : x \in [i, i+1]\}$$

para cada $i \in \{1, \ldots, b-1\}$ y $x \in (i, i+1)$, e igual a $f(i)$ en cada punto i de la partición Q.

c) **(2,0 pts.)** Justifique que $g \in \mathcal{E}_+(f)$. Muestre que $\int_1^b g = \sum_{i=1}^{b-1} \frac{1}{i}$ y concluya que $\ln(b) \le \sum_{i=1}^{b-1} \frac{1}{i}$.

Solución

Se tiene que g es escalonada porque está definida como una constante en los intervalos $(i, i+1)$ asociados a la partición Q **(0,3 pts. por justificar que g es escalonada)**. Además, $g \in \mathcal{E}_+(f)$ porque está definida como el supremo de los valores de $f(x)$ en cada intervalo $[i, i+1]$, que contiene a $(i, i+1)$. Es decir, para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$,

$$f(x) \leq \sup\{f(x) : x \in [i, i+1]\} = g_+(x), \qquad \text{para todo } x \in (i, i+1).$$

Por otro lado en los puntos i las funciones g y f tienen el mismo valor. Con lo cual se concluye que

$$f(x) \leq g(x), \qquad \text{para todo } x \in [1, b]. \tag{6}$$

(0,5 pts. por probar la desigualdad (6))

Para calcular $\displaystyle\int_1^b g$, se recurre a la definición:

$$\int_1^b g = \sum_{i=1}^{b-1} ((i+1) - i) \cdot g^i = \sum_{i=1}^{b-1} g^i$$

donde g^i es el valor constante que toma g en el intervalo $(i, i+1)$.

(0,2 pts. por realizar el cálculo anterior)

De manera similar a la parte a), como f es decreciente, el supremo en el intervalo $[i, i+1]$ se alcanza en el extremo izquierdo de dicho intervalo. Así, $g^i = f(i) = \dfrac{1}{i}$ para todo $i \in \{1, \ldots, b-1\}$.

(0,3 pts. por justificar que $\boldsymbol{g^i = f(i) = \frac{1}{i}}$)

Se concluye de esta manera que

$$\int_1^b g = \sum_{i=1}^{b-1} \frac{1}{i}.$$

(0,2 pts. por justificar la igualdad anterior)

Finalmente, como $g \in \mathcal{E}_+(f)$, por definición de la integral de Riemann y el cálculo de la parte anterior se concluye que

$$\ln(b) = \int_1^b f \leq \int_1^b g = \sum_{i=1}^{b-1} \frac{1}{i}.$$

(0,5 pts. por justificar la desigualdad anterior)

Si usa un teorema, no olvide verificar explícitamente cada una de sus hipótesis.

Duración: 3h.