Control 2

P1. i) Considere la función $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-3/2\}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\frac{e^{-x^2}}{2x+3}$$

a) **(2,0 pts.)** Estudie la derivabilidad de f, calcule f' donde f sea derivable y encuentre todos los puntos $\bar{x}\in \mathrm{Dom}(f)$ donde $f'(\bar{x})=0$.

b) **(1,0 pts.)** Encuentre los intervalos (si los hay) donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos de mínimos y máximos, locales y globales, de f.

ii) **(3,0 pts.)** Sea $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función infinitamente derivable. Suponga que existe $r>0$ tal que $|f^{[k]}(x)|\le r$, para todo $k\in\mathbb{N}$ y $x\in\mathbb{R}$. Considere $\bar{x},x_0\in\mathbb{R}$ fijos con $\bar{x}<x_0$. Demuestre que

$$\lim_{k\to\infty}|f(x_0)-T_f^k(x_0-\bar{x})|=0,$$

donde $T_f^k(x_0-\bar{x})$ denota el polinomio de Taylor de orden k en torno a $\bar{x}$ evaluado en x_0.

<u>Indicación:</u> Recuerde que $\lim_{n\to\infty}\frac{t^n}{n!}=0$, para cualquier $t\in\mathbb{R}$.

P2. i) Cálcule las siguientes primitivas:

a) **(1,5 pts.)** $\displaystyle\int \mathrm{sen}(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

b) **(1,5 pts.)** $\displaystyle\int \frac{1}{2+3\cos(x)}\,\mathrm{d}x$

ii) **(3,0 pts.)** Para $a>0$ y $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ considere

$$I_n=\int\frac{1}{(a^2+x^2)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Integrando por partes adecuadamente, muestre que, para cada $n\ge 2$, se tiene que

$$I_n=\int\frac{1}{(a^2+x^2)^n}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2a^2(n-1)\,(a^2+x^2)^{n-1}}+\left(\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}\right)I_{n-1}.$$

Use lo anterior para calcular I_2 explícitamente.

<u>Indicación:</u> Puede serle útil que $\displaystyle\frac{x^2}{(a^2+x^2)^k}=\frac{1}{(a^2+x^2)^{k-1}}-\frac{a^2}{(a^2+x^2)^k}$ para todo $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$.

P3. Para $b\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, sea $f\colon[1,b]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\frac{1}{x}$.

Para $n\in\mathbb{N}$, considere una partición geométrica $P_n=\{x_0,\dots,x_n\}$ del intervalo $[1,b]$, esto es, $x_i=r^i$, con $r=b^{1/n}$, para $i\in\{0,\dots,n\}$. Sean $f_-,f_+\colon[1,b]\to\mathbb{R}$ las funciones escalonadas asociadas a la partición P_n definidas por

$$f_-(x)=\inf\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\}\quad \text{y}\quad f_+(x)=\sup\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\}$$

para cada $i\in\{1,\dots,b\}$ y $x\in(x_{i-1},x_i)$, e iguales a $f(x_i)$ en cada punto x_i de la partición P_n.

a) **(2,0 pts.)** Justifique que $f_-\in\mathcal{E}_-(f)$ y que $f_+\in\mathcal{E}_+(f)$. Pruebe además que

$$\int_1^b f_-=\frac{n(r-1)}{r}\quad \text{y}\quad \int_1^b f_+=n(r-1).$$

b) **(2,0 pts.)** Justifique que f es Riemann integrable en $[1,b]$ y use los resultados previos para concluir que $\displaystyle\int_1^b f = \ln(b)$.

<u>Indicación:</u> Recuerde que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b^{1/n} = 1$ y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(b^{1/n}-1) = \ln(b)$.

Considere también una partición equiespaciada $Q = \{1, \ldots, b\}$ del intervalo $[1,b]$. Sea $g\colon [1,b] \to \mathbb{R}$ la función escalonada asociada a la partición Q definida por

$$g(x) = \sup\{f(x) : x \in [i, i+1]\}$$

para cada $i \in \{1, \ldots, b-1\}$ y $x \in (i, i+1)$, e igual a $f(i)$ en cada punto i de la partición Q.

c) **(2,0 pts.)** Justifique que $g \in \mathcal{E}_+(f)$. Muestre que $\displaystyle\int_1^b g = \sum_{i=1}^{b-1} \frac{1}{i}$ y concluya que $\displaystyle\ln(b) \leq \sum_{i=1}^{b-1} \frac{1}{i}$.

<u>**Si usa un teorema, no olvide verificar explícitamente cada una de sus hipótesis.**</u>

Duración: 3h.