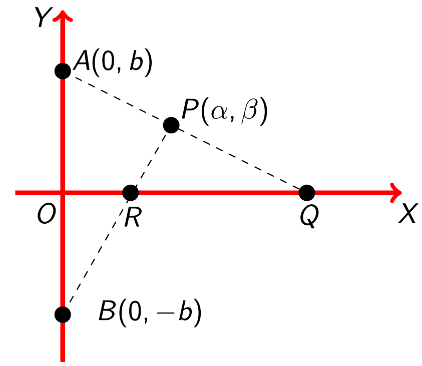
Pauta de corrección Control 2

P1. Un punto $P(\alpha,\beta)$ del primer cuadrante del plano se une con los puntos $A(0,b)$ y $B(0,-b)$ del eje OY (donde $b>0$).
Se sabe que las rectas L_{PA} y L_{PB} cortan al eje OX en ciertos puntos $Q(x_Q,0)$ y $R(x_R,0)$, respectivamente. Si además se sabe que $x_R \cdot x_Q = a^2$ (donde $a>b$), determine el Lugar Geométrico que recorre el punto P. Identifique el lugar geométrico encontrado indicando todos los parámetros importantes (pendiente, centro, radio, semiejes, excentricidad, focos, directrices, asíntotas, etc. según corresponda).



(Indicación: Primero determine las coordenadas x_Q y x_R de Q y R en términos de α,β y b.)

Solución: Recta L_{AP}: $m_{AP} = \frac{\beta-b}{\alpha}$. 0.5

ecuación de la recta: $y = b + \frac{\beta-b}{\alpha}x$. 0.5

Intersección con OX: $y=0 \iff x_Q = \frac{-\alpha b}{\beta-b}$. 0.5

El cálculo de x_R es análogo y se puede rehacer o bien cambiar b por $-b$ en la expresión anterior.

Es decir, $x_R = \frac{\alpha b}{\beta+b}$. 1.5

Ecuación del L.G.:

$$(\alpha,\beta)\in LG \iff \frac{\alpha b}{\beta+b}\cdot\frac{-\alpha b}{\beta-b} = a^2 \iff -\alpha^2 b^2 = a^2(\beta^2-b^2)$$

$$\iff 1 = \frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}.$$ 1.5

El lugar geométrico es la **zona del primer cuadrante** de la elipse de semiejes a, b, 0.5 0.5
de excentricidad $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, focos $(\pm ae, 0)$ y directrices $x = \pm a/e$. 0.5

P2. Considere la función real de variable real definida por $f(x) = \frac{|x|}{1-|x|}$

a) **(2 pts)** Determine Dom(f), ceros, signos y paridad de f.

Solución: Dominio:
$$x \in \text{Dom}(f) \iff 1 - |x| \neq 0$$
$$\iff x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$
0.5

Ceros:
$$f(x) = 0 \iff \frac{|x|}{1-|x|} = 0 \iff x = 0.$$
0.5

Signos:
$$f(x) > 0 \iff \frac{|x|}{1-|x|} > 0 \iff |x|(1-|x|) > 0$$
$$\iff x \in (-1, 0) \cup (0, 1).$$
0.3
$$f(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$
0.2

Paridad:
$$f(-x) = \frac{|-x|}{1-|-x|} = \frac{|x|}{1-|x|} = f(x).$$

Es decir, es una función par.
0.5

b) **(3 pts)** Estudie intervalos de crecimiento o decrecimiento de f. Determine el conjunto imagen de f (o sea Im(f) o Rec(f) que es lo mismo), resolviendo explícitamente la ecuación $y = f(x)$. Bosqueje el gráfico de f.

Solución:
Crecimiento en $x \geq 0$ (por paridad!!).
Se tiene que:
$$0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2}{1-x_2} - \frac{x_1}{1-x_1}$$
$$= \frac{x_2 - x_1}{(1-x_2)(1-x_1)}.$$

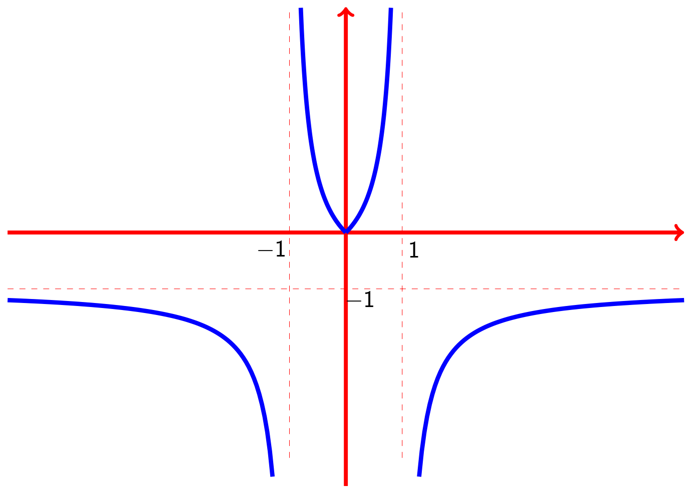
Esta expresión es > 0 si $x_1, x_1 \in [0, 1)$ y también si $x_1, x_2 \in (1, \infty)$. Es decir, en $[0, 1)$ y en $[1, \infty)$, f es estrictamente creciente.
1.0

Por paridad, en $(-\infty, -1)$ y en $(-1, 0]$ es estrictamente decreciente.
0.5

Conjunto Imagen:
$$y \in Im(f) \iff \exists x \in \text{Dom}(f) \ , \ y = \frac{|x|}{1-|x|}$$
$$\iff \exists x \in \text{Dom}(f) \ , \ y = |x|(1+y)$$
$$\iff y \neq -1 \ \wedge \ \frac{y}{1+y} \geq 0.$$
$$\iff y \in (-\infty, -1) \cup [0, \infty).$$

Es decir: Im$(f) = (-\infty, -1) \cup [0, \infty)$.
1.0

El gráfico es:



0.5

c) **(1 pt)** Pruebe que $f_{|_{(1,+\infty)}}$ y $f_{|_{(-\infty,-1)}}$ son inyectivas (donde $f_{|_{(1,+\infty)}}$ y $f_{|_{(-\infty,-1)}}$ son las restricciones de f a $(1,+\infty)$ y $(-\infty,-1)$, respectivamente).

Solución: Primero para $f_{|_{(1,+\infty)}}$. Sean $x_1, x_2 \in (1,+\infty)$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Con esto:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \quad &\Longrightarrow \quad \frac{|x_1|}{1-|x_1|} = \frac{|x_2|}{1-|x_2|} \\ &\Longrightarrow \quad |x_1| - |x_1||x_2| = |x_2| - |x_1||x_2| \\ &\Longrightarrow \quad |x_1| = |x_2| \\ &\Longrightarrow \quad x_1 = x_2 \end{aligned}$$

La última igual se tiene porque $x_1, x_2 > 0$. 0.7

El caso $x_1, x_2 \in (-\infty,-1)$ es análogo teniendo en cuenta que $|x_1| = -x_1$ y $|x_2| = -x_2$. 0.3

(Obs: También se puede argumentar usando la monotonía de f estudiada en el item b).)