Pauta Control 3

P1. (a) **(3.0 pts)** Muestre que
$$\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta).$$

Solución Usando la fórmula para la suma de ángulos 0.5

$$\cos(3\theta) = \cos(2\theta+\theta) = \cos(2\theta)\cos(\theta) - \operatorname{sen}(2\theta)\operatorname{sen}(\theta),$$

considerando las fórmulas para ángulos dobles de seno y coseno 0.5

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta),\\ \operatorname{sen}(2\theta) &= 2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta),\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos(2\theta)\cos(\theta) - \operatorname{sen}(2\theta)\operatorname{sen}(\theta)\\ &= \left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right)\cos(\theta) - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,(\operatorname{sen}\theta)\\ &= \left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right)\cos(\theta) - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta.\end{aligned}$$

0.5 por escribir $\cos(3\theta)$ en términos de senos y cosenos

Recordando que $\operatorname{sen}^2\theta = 1-\cos^2\theta$, se cumple 0.5

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \left(\cos^2\theta + \cos^2\theta - 1\right)\cos(\theta) - 2\left(1-\cos^2\theta\right)\cos\theta\\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta + 2\left(\cos^3\theta - \cos\theta\right)\\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

probando lo pedido. 1.0

(b) **(3.0 pts)** Resuelva la ecuación

$$(1-\tan(x))(\operatorname{sen}(2x)+1) = 1+\tan(x).$$

Solución Realizando las operaciones indicadas

$$\begin{aligned}(1-\tan(x))(\operatorname{sen}(2x)+1) &= 1+\tan(x)\\ \operatorname{sen}(2x) + 1 - \tan(x)\operatorname{sen}(2x) - \tan(x) &= 1+\tan(x).\end{aligned}$$

0.3

Usando la identidad de seno del ángulo doble

$$2\operatorname{sen}(x)\cos(x) - 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)\tan(x) - 2\tan(x) = 0,$$

0.2

dado que $\tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$

$$2\operatorname{sen}(x)\cos(x) - 2\operatorname{sen}^2(x) - 2\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = 0,$$

0.5 por llegar a una ecuación en términos de senos y cosenos

reordenando y usando que $\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\cos(x)}\left(\operatorname{sen}(x)\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\right) &= 0 \\ \frac{2}{\cos(x)}\left(\operatorname{sen}(x)\left(1 - \operatorname{sen}^2(x)\right) - \operatorname{sen}^2(x)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\right) &= 0 \\ -\frac{2}{\cos(x)}\operatorname{sen}^2(x)\left(\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\right) &= 0, \end{aligned}$$

así

$$\operatorname{sen}(x) = 0 \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen}(x) + \cos(x) = 0,$$

1.0

por tanto, las soluciones de la ecuación son los valores de x tales que

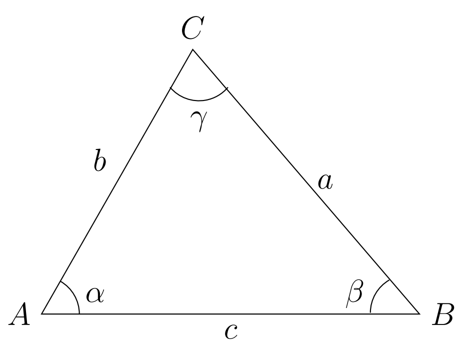
$$\operatorname{sen}(x) = 0 \quad \text{ó} \quad \tan(x) = -1,$$

en conclusión, el conjunto solución para la ecuación dada es

$$\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{k\pi - \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

1.0

P2. Considere el triángulo $\triangle ABC$



(a) **(3.0 pts)** Usando las fórmulas del seno de la diferencia y el seno de la suma, y el teorema del coseno demuestre que

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)}{a}\dfrac{(a^2 + c^2 - b^2)}{2c} - \dfrac{\operatorname{sen}(\beta)}{b}\dfrac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2c}}{\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)}{a}\dfrac{(a^2 + c^2 - b^2)}{2c} + \dfrac{\operatorname{sen}(\beta)}{b}\dfrac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2c}}.$$

Solución Usando las fórmulas del seno de la diferencia y el seno de la suma se obtiene

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}.$$

1.0

Aplicando el Teorema del coseno, se cumple que

$$\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos\alpha,\\ b^2&=a^2+c^2-2ac\cos\beta,\end{aligned}$$

luego,

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\qquad \cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}.$$

1.0

Reemplazando en la primera expresión y reordenando términos, se concluye que

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}&=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}\\ &=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{a}\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)-\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{b}\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)}{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{a}\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)+\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{b}\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)}.\end{aligned}$$

1.0

(b) **(3.0 pts)** Use el teorema del seno en la expresión anterior para concluir que

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}=\frac{a^2-b^2}{c^2}.$$

Solución Aplicando el Teorema del seno, se tiene que

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}=\frac{\operatorname{sen}\beta}{b},$$

1.0

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}&=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{b}\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)-\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{b}\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)}{\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{b}\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)+\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{b}\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)}\\ &=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{b}\left(\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)-\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\right)}{\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{b}\left(\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)+\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\right)},\end{aligned}$$

1.0

simplificando

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} &= \frac{\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)-\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)}{\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)+\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)} \\
&= \frac{(a^2+c^2-b^2)-(b^2+c^2-a^2)}{(a^2+c^2-b^2)+(b^2+c^2-a^2)} \\
&= \frac{2\left(a^2-b^2\right)}{2c^2} = \frac{a^2-b^2}{c^2},
\end{aligned}$$

1.0

probando la identidad.

Tiempo: 1:30 horas.