Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1002: Cálculo Diferencial e Integral. 2024-1

Pauta de corrección Control 1

P1. a) Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \exp\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{si } x \neq 0, \\ \alpha & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

i) **(0,5 pts.)** Demuestre que f es continua en $\bar{x} = 0$ si y solo si $\alpha = 0$.

Solución

Se tiene que f es continua en $\bar{x} = 0$ si y solo si

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x}) && \text{(Definición de continuidad)} \\ \iff & \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) && (\bar{x} = 0) \\ \iff & \lim_{x\to 0} f(x) = \alpha && (f(0) = \alpha) \\ \iff & \lim_{x\to 0} x^2 \exp\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \alpha. && \text{(Definición de } f(x) \text{ para } x \neq 0) \end{aligned}$$

(0,1 pts. por escribir el límite que se debe calcular)

Se debe entonces calcular el límite de la última línea. Para esto, se puede observar primero que $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ **(0,1 pts. por calcular este límite)**. Además, la función seno es acotada: solo toma valores entre -1 y 1 **(0,1 pts. por decir que la función seno es acotada)**. Finalmente, la función exponencial es acotada al restringirla a $[-1, 1]$ ya que es creciente:

$$\exp(-1) \leq \exp\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \leq \exp(1)$$

para todo $x \neq 0$ **(0,1 pts. por justificar que la función $\exp\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ también es acotada)**.

Alternativa

También se puede argumentar que la función exponencial es continua, por lo que alcanza su mínimo y máximo al restringirla a $[-1, 1]$, o bien que por ser continua es acotada en $[-1, 1]$.

De esta manera, el límite corresponde a la multiplicación de un límite nulo y el de una función acotada, lo que resulta ser cero. Se concluye entonces que f es continua si y solo si $\alpha = 0$.

(0,1 pts. por concluir que el límite es cero)

Desde ahora suponga que $\alpha = 0$.

ii) **(1,0 pts.)** Demuestre que f es derivable en todo su dominio y calcule su derivada f'.

Solución

Para ver que f es derivable en $\bar{x}$, se consideran separadamente los casos $\bar{x} \neq 0$ y $\bar{x} = 0$.
Sea $\bar{x} \neq 0$. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\bar{x} \in (a, b)$ y tales que $0 \notin (a, b)$. Luego, f restringida a (a, b) es igual a la función $g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = x^2 \exp\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

(0,1 pts. por explicitar que, lejos de cero, f es igual a $x^2 \exp\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$)

Esta función es derivable en todo su dominio (y, en particular, en $\bar{x}$) por álgebra y composición de funciones continuas. En efecto, es la multiplicación del polinomio x^2 con la composición de una función exponencial, trigonométrica, y la potencia x^{-1}. Como $0 \notin (a,b)$, cada una de estas funciones está bien definida y es derivable.

(0,2 pts. por justificar que g es derivable)

(0,1 pts. si solo se usa la frase "por álgebra y composición de funciones derivables")

Para calcular la derivada, se usan las reglas de cálculo:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^2)' \exp\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) + x^2 \left(\exp\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)' \\ &= 2x \exp\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) + x^2 \exp\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right) \\ &= \exp\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(2x - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right). \end{aligned}$$

(0,2 pts. por calcular $g'(x)$)

Esta fórmula es válida en todo (a,b) y, en particular, en $\bar{x} \in (a,b)$. Como f y g coinciden en (a,b), se obtiene que

$$f'(\bar{x}) = \exp\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\bar{x}}\right)\right)\left(2\bar{x} - \cos\left(\frac{1}{\bar{x}}\right)\right).$$

(0,1 pts. por encontrar $f'(\bar{x})$)

Ahora, si $\bar{x} = 0$, se debe calcular la derivada por definición. Se tiene que

$$\begin{aligned} f'(\bar{x}) &= \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} && \text{(Definición de derivada)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} && \bar{x} = 0 \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} && f(0) = 0 \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \exp\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x} && \text{(Definición de } f(x) \text{ para } x \neq 0) \\ &= \lim_{x\to 0} x \exp\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right). \end{aligned}$$

(0,3 pts. por escribir el límite que se debe calcular)

Nuevamente, este límite es la multiplicación de un límite nulo por el de una función acotada, así que es cero.

(0,1 pts. por calcular el límite)

Se concluye entonces que

$$f'(\bar{x}) = \begin{cases} \exp\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\bar{x}}\right)\right)\left(2\bar{x} - \cos\left(\frac{1}{\bar{x}}\right)\right) & \text{si } \bar{x} \neq 0, \\ 0 & \text{si } \bar{x} = 0. \end{cases}$$

iii) **(1,5 pts.)** Demuestre que f' no es continua en $\bar{x} = 0$.
<u>Indicación:</u> Estudie el límite $\lim_{n\to\infty} f'(x_n)$ con $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$.

Solución

Siguiendo la indicación, sea (x_n) la sucesión definida por $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$. Se tiene que $x_n \to 0$ **(0,2 pts. por observar que $x_n \to 0$)**. Además,

$$f'(x_n) = f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = \exp(\operatorname{sen}(2n\pi))\left(\frac{2}{2n\pi} - \cos(2n\pi)\right) = \exp(0)\left(\frac{1}{n\pi} - 1\right) = \frac{1}{n\pi} - 1.$$

(0,3 pts. por calcular $f'(x_n)$)

Luego,

$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n\pi} - 1\right) = -1.$$

(0,5 pts. por calcular $\lim_{n\to\infty} f'(x_n)$)

Esto muestra que $\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = -1 \neq 0 = f'(0)$, por lo que f' no es continua en $\bar{x} = 0$.

(0,5 pts. por observar que el hecho de que $\lim_{n\to\infty} f'(x_n) \neq f'(0)$ implica que f' no es continua en $\bar{x} = 0$)

b) Sea $f\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ biyectiva y derivable en todo su dominio. Se tiene que f^{-1} también es derivable en todo su dominio (no lo demuestre).

Considere la función $h\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \frac{1}{1 + f^{-1}(x)}.$$

i) **(0,5 pts.)** Justifique que h es derivable en todo su dominio.

Solución

La función h es derivable en todo su dominio por álgebra y composición de funciones derivables (diferenciables). En efecto, la función $1 + f^{-1}(x)$ es derivable en todo su dominio al ser la suma de dos funciones derivables (una constante y f^{-1}).

(0,2 pts. por observar que el denominador es derivable)

Finalmente, h es el cociente de una función constante y $1 + f^{-1}(x)$, donde el denominador nunca se anula porque $f^{-1}(x) > 0$ para todo $x \in (0, +\infty)$.

(0,3 pts. por justificar que *h* es derivable usando que el denominador nunca se anula)

ii) **(2,5 pts.)** Demuestre que $h'(x)f'(f^{-1}(x)) + \big(h(x)\big)^2 = 0$ para todo $x \in (0, +\infty)$.

Solución

Sea $x \in (0, +\infty)$. Se comienza calculando $h'(x)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} h'(x) &= ((1 + f^{-1}(x))^{-1})' \\ &= -\frac{1}{(1 + f^{-1}(x))^2} \cdot (1 + f^{-1}(x))' && \textbf{(Regla de la cadena – 0,8 pts.)} \\ &= -\frac{1}{(1 + f^{-1}(x))^2} \cdot \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, && \textbf{(Derivada de una función inversa – 1,2 pts.)} \end{aligned}$$

donde se usó la fórmula de la derivada de una función inversa. Así,

$$\begin{aligned} h'(x)f'(f^{-1}(x)) + \big(h(x)\big)^2 &= -\frac{1}{(1 + f^{-1}(x))^2} \cdot \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} f'(f^{-1}(x)) + \frac{1}{(1 + f^{-1}(x))^2} \\ &= -\frac{1}{(1 + f^{-1}(x))^2} + \frac{1}{(1 + f^{-1}(x))^2} = 0. \end{aligned}$$

(Completar el cálculo – 0,5 pts.)

P2. Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sea $f\colon [a, b] \to [0, +\infty)$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Suponga además que $f(a) = f(b) = 0$ y que $f(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Sea $r \in \mathbb{R}$ fijo. Considere la función $h\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = rx - \ln(f(x))$.

a) **(1,0 pto.)** Determine los puntos donde h es derivable.

Solución

Se tiene que h es derivable en todo su dominio (a, b) por álgebra y composición de funciones derivables.

(0,5 pts. por usar la frase "por álgebra y composición de funciones derivables")

En efecto, es la resta de un polinomio y la función $\ln(f(x))$, donde el sustraendo es derivable al ser la composición de dos funciones derivables y bien definidas (porque, por hipótesis, f solo toma valores estrictamente positivos en (a, b)).

(0,5 pts. por explícitar las funciones derivables)

b) **(1,0 pto.)** Demuestre que $\lim\limits_{x\to a^+} h(x) = \lim\limits_{x\to b^-} h(x) = +\infty$.

Solución

Como f es continua, se tiene que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) = 0 \quad \text{y que} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b) = 0.$$

(0,4 pts. por justificar que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = 0$)

Combinando esto con el límite conocido $\lim\limits_{u\to 0^+} \ln(u) = -\infty$, se concluye que

$$\lim_{x\to a^+} -\ln(f(x)) = +\infty \quad \text{y que} \quad \lim_{x\to b^-} -\ln(f(x)) = +\infty.$$

(0,4 pts. por justificar que $\lim\limits_{x\to a^+} -\ln(f(x)) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to b^-} -\ln(f(x)) = +\infty$)

Finalmente, como $\lim\limits_{x\to a^+} rx = ra$ y $\lim\limits_{x\to b^-} rx = rb$, al sumar estos términos (finitos) no cambia el valor del límite (infinito). Así, $\lim\limits_{x\to a^+} h(x) = \lim\limits_{x\to b^-} h(x) = +\infty$. **(0,2 pts. por completar el argumento)**

c) **(2,0 pts.)** Demuestre que h tiene un mínimo global, es decir, que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$h(c) \leq h(x) \text{ para todo } x \in (a, b).$$

Solución

Sea $t \in (a, b)$ fijo. Como $\lim\limits_{x\to a^+} h(x) = \lim\limits_{x\to b^-} h(x) = +\infty$, existe $x_1 \in (a, b)$ tal que $h(t) < h(x)$ para todo $a < x < x_1$, y existe $x_2 \in (a, b)$ tal que $h(t) < h(x)$ para todo $x_2 < x < b$ **(0,5 pts. por justificar que $h(x) > h(t)$ si x está suficientemente cerca de a o de b)**. Por otro lado, la función h restringida al intervalo $[x_1, x_2]$ es continua y está definida en un intervalo cerrado y acotado, así que alcanza su mínimo, digamos en $c \in [x_1, x_2]$ **(0,5 pts. por usar que toda función continua definida en un intervalo cerrado y acotado alcanza su mínimo)**. Es decir, existe $c \in [x_1, x_2] \subseteq (a, b)$ tal que

$$h(c) \leq h(x) \text{ para todo } x \in [x_1, x_2].$$

(0,5 pts. por justificar que $h(c) \leq h(x)$ para todo $x \in [x_1, x_2]$)

En particular, $h(c) \leq h(t)$ (ya que $t \in [x_1, x_2]$). Así, también se tiene que $h(c) \leq h(t) < h(x)$ para todo $a < x < x_1$, y que $h(c) \leq h(t) < h(x)$ para todo $x_2 < x < b$ **(0,3 pts. por justificar que $h(c) \leq h(x)$ si x está suficientemente cerca de a o de b)**. Luego, $h(c) \leq h(x)$ para todo $x \in (a, b)$, lo que muestra que h tiene un mínimo global.

(0,2 pts. por concluir que c es un mínimo global de h)

d) **(2,0 pts.)** Demuestre que existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = rf(c)$.

Solución

Por las partes anteriores, h tiene un mínimo global (y por lo tanto local) en $c \in (a, b)$ **(0,4 pts. por justificar que c también es un mínimo local)**. Además h es derivable en dicho punto, ya que es derivable en todo su dominio (a, b) **(0,2 pts. por verificar las hipótesis de la regla de Fermat)**. Por lo tanto, $h'(c) = 0$.

(0,4 pts. por usar la regla de Fermat)

Como se tiene que

$$h'(x) = (rx - \ln(f(x)))' = r - \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = r - \frac{f'(x)}{f(x)},$$

(0,5 pts. por calcular $h'(x)$)

se concluye que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$r - \frac{f'(c)}{f(c)} = 0.$$

(0,5 pts. por deducir esta igualdad)

Reordernando esta expresión se obtiene lo pedido.

P3. a) **(3,0 pts.)** Sea $f\colon [0,1] \to [0,+\infty)$ una función continua tal que $f(0) = f(1) = 0$. Sea además $\lambda \in [0,1]$ fijo. Demuestre que existe $c \in [0, 1-\lambda]$ tal que

$$f(c+\lambda) = f(c).$$

Solución

Sea $h\colon [0, 1-\lambda] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(x+\lambda) - f(x)$ **(0,6 pts. por definir la función auxiliar)**. Se tiene que h es continua por álgebra y composición de funciones continuas, al ser la resta de dos funciones continuas, donde el minuendo es continuo al ser la composición de f, que es continua por hipótesis, con el polinomio $x+\lambda$ **(0,4 pts. por justificar que $\boldsymbol{h}$ es continua)**. Además, se tiene que

$$h(0) = f(0+\lambda) - f(0) = f(\lambda) - 0 = f(\lambda) \geq 0$$

(0,5 pts. por justificar que $\boldsymbol{h(0) \geq 0}$)

$$h(1-\lambda) = f(1-\lambda+\lambda) - f(1-\lambda) = f(1) - f(1-\lambda) = 0 - f(1-\lambda) = -f(1-\lambda) \leq 0,$$

(0,5 pts. por justificar que $\boldsymbol{h(1-\lambda) \leq 0}$)

de donde h cambia de signo (o se anula) en el intervalo $[0, 1-\lambda]$. Por lo tanto, del teorema de los valores intermedios, existe $c \in [0, 1-\lambda]$ tal que $h(c) = 0$ **(0,5 pts. por usar el teorema de los valores intermedios)**, lo que muestra que $f(c+\lambda) - f(c) = 0$ **(0,3 pts. por obtener $\boldsymbol{f(c+\lambda) - f(c)}$)**. Así, reordenando se obtiene $f(c+\lambda) = f(c)$.

(0,2 pts. por concluir la igualdad pedida)

b) **(3,0 pts.)** Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sea $f\colon [a,b] \to (0,+\infty)$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Demuestre que existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left(\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)\right).$$

<u>Indicación:</u> Analice la función $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \ln(f(x))$.

Solución

Siguiendo la indicación, sea $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \ln(f(x))$. Se tiene que la función h es derivable en (a,b) al ser la composición de dos funciones derivables y bien definidas en (a,b) (ya que f solo toma valores estrictamente positivos) **(0,2 pts. por justificar que $\boldsymbol{h}$ es derivable)**. Además, h es continua en $[a,b]$ porque f es continua por hipótesis, así que h es la composición de dos funciones continuas. Por lo tanto, se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio en $[a,b]$. **(0,4 pts. por verificar las hipótesis del teorema del valor medio)**. Así, existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{h(b) - h(a)}{b-a} = h'(c).$$

(0,5 pts. por enunciar el teorema del valor medio)

Como, para todo $x \in (a,b)$,

$$h'(x) = (\ln(f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

(0,5 pts. por calcular $\boldsymbol{h'(x)}$)

resulta que

$$\frac{\ln(f(b)) - \ln(f(a))}{b-a} = \frac{f'(c)}{f(c)},$$

(1,0 pts. por aplicar el teorema del valor medio)

de donde

$$\ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right) = \frac{f'(c)}{f(c)}(b-a).$$

(0,2 pts. por reordenar)

Finalmente, tomando exponencial se concluye que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left(\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)\right).$$

(0,2 pts. por obtener lo pedido)