Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1002: Cálculo Diferencial e Integral. 2024-1

Control 1

P1. a) Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \exp\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{si } x \neq 0, \\ \alpha & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

i) **(0,5 pts.)** Demuestre que f es continua en $\bar{x} = 0$ si y solo si $\alpha = 0$.

Desde ahora suponga que $\alpha = 0$.

ii) **(1,0 pts.)** Demuestre que f es derivable en todo su dominio y calcule su derivada f'.

iii) **(1,5 pts.)** Demuestre que f' no es continua en $\bar{x} = 0$.
Indicación: Estudie el límite $\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n)$ con $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$.

b) Sea $f\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ biyectiva y derivable en todo su dominio. Se tiene que f^{-1} también es derivable en todo su dominio (no lo demuestre).
Considere la función $h\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \frac{1}{1 + f^{-1}(x)}.$$

i) **(0,5 pts.)** Justifique que h es derivable en todo su dominio.

ii) **(2,5 pts.)** Demuestre que $h'(x)f'(f^{-1}(x)) + \big(h(x)\big)^2 = 0$ para todo $x \in (0, +\infty)$.

P2. Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sea $f\colon [a, b] \to [0, +\infty)$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Suponga además que $f(a) = f(b) = 0$ y que $f(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$.
Sea $r \in \mathbb{R}$ fijo. Considere la función $h\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = rx - \ln(f(x))$.

a) **(1,0 pto.)** Determine los puntos donde h es derivable.

b) **(1,0 pto.)** Demuestre que $\lim\limits_{x\to a^+} h(x) = \lim\limits_{x\to b^-} h(x) = +\infty$.

c) **(2,0 pts.)** Demuestre que h tiene un mínimo global, es decir, que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$h(c) \leq h(x) \text{ para todo } x \in (a, b).$$

d) **(2,0 pts.)** Demuestre que existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = rf(c)$.

P3. a) **(3,0 pts.)** Sea $f\colon [0, 1] \to [0, +\infty)$ una función continua tal que $f(0) = f(1) = 0$. Sea además $\lambda \in [0, 1]$ fijo.
Demuestre que existe $c \in [0, 1 - \lambda]$ tal que

$$f(c + \lambda) = f(c).$$

b) **(3,0 pts.)** Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sea $f\colon [a, b] \to (0, +\infty)$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).
Demuestre que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left(\frac{f'(c)}{f(c)}(b - a)\right).$$

Indicación: Analice la función $h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \ln(f(x))$.

Si usa un teorema, no olvide verificar explícitamente cada una de sus hipótesis.

Duración: 3h.