Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1001: Introducción al Cálculo 2024-1

Pauta de corrección Control 1

P1. (a) **(3 pts)** Usando los axiomas de **cuerpo** de $\mathbb{R}$, los teoremas de **unicidad** de elementos neutros e inversos y la **propiedad** "$a \cdot 0 = 0$", demuestre que:

$$1 + (-1)^{-1} = 0.$$

(OBS: Si necesita alguna propiedad adicional, debe demostrarla)

Solución:

$$P.D.Q. : 1 + (-1)^{-1} = 0.$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
1 + (-1)^{-1} &= (-1)\cdot(-1)^{-1} + (-1)^{-1}\cdot 1 && ; Ax.InvProd, AxENProd && \boxed{1.0} \\
&= (-1)^{-1}\cdot(-1) + (-1)^{-1}\cdot 1 && ; Ax.Conmut. && \boxed{0.4} \\
&= (-1)^{-1}\cdot\Big[(-1) + 1\Big] && ; Ax.Distrib. && \boxed{0.4} \\
&= (-1)^{-1}\cdot\Big[1 + (-1)\Big] && ; Ax.Conmut. && \boxed{0.4} \\
&= (-1)^{-1}\cdot 0 && ; Ax.InvSuma && \boxed{0.4} \\
&= 0 && ; \text{Prop "}a\cdot\ 0 = 0\text{" permitida.} && \boxed{0.4}
\end{aligned}$$

OBS1: Cada axioma bien usado pero no justificado suma solo 0.1 ptos. de los 0.4. Cada paréntesis mal usado es -0.4 ptos.
OBS2: Usar muchos axiomas pero sin un objetivo final claro no suam tanto puntaje (ej: conmutar y conmutar lo mismo muchas veces no suma 0.4*número de conmutaciones). En ese caso los puntos se calculan como $3.0 - 0.4 * n$, donde "n" representa cuantos axiomas faltaron (ej: escribir "$(-1)^{-1} = 1\cdot(-1)^{-1}$ indicando que se uso 1 solo axioma y no 2 (E.N.Suma+Ax.Conmut tendría un descuento de 0.4).

(b) **(3 pts)** Usando los axiomas **y propiedades** de cuerpo y orden de $\mathbb{R}$, demuestre que:

$$\forall x > 0, \qquad (x+4)(x^{-1}+1) \geq 9.$$

Solución: Claramente, para todo $x > 0$ se tiene que:

$$\begin{aligned}(x+4)(x^{-1}+1) &= 5 + x + 4x^{-1} && 1.0\\ &= 5 + (x^2+4)x^{-1} && 0.5\end{aligned}$$

Alternativa 1:

$$\begin{aligned}&= 5 + (x^2 + 4 - 4x + 4x)x^{-1}\\ &= 9 + (x-2)^2 x^{-1} && 1.0\\ &\geq 9 && \text{ya que } (x-2)^2 \geq 0 \text{ y } x^{-1} > 0 \quad 0.5\end{aligned}$$

Alternativa 2:

$$\begin{aligned}&\geq 5 + (2 \cdot 2 \cdot x)x^{-1} && \text{ya que } a^2 + b^2 \geq 2ab \text{ y } x^{-1} > 0 \quad 1.0\\ &= 9 && \text{ya que } (x-2)^2 \geq 0 \text{ y } x^{-1} > 0 \quad 0.5\end{aligned}$$

OBS1: También se puede probar que $(x+4)(x^{-1}+1) - 9 \geq 0$, factorizando como $(x-2)^2 x^{-1}$.

OBS2: También se puede usar contradicción, partiendo de $(x+4)(x^{-1}+1) < 9$, factorizando y llegando a la contradicción $(x-2)^2 < 0$.

En ambos casos, los pasos a seguir son similares a los de arriba., es decir, distribuir, factorizar y completar cuadrado perfecto.

P2. (a) **(3 pts)** Resolver la inecuación

$$\frac{|x|-x}{|x|^3} \leq \frac{1}{2}.$$

Solución: Para "resolver los módulos", conviene separar el problema en 3 (o dos) casos:
Caso1: Si $x > 0$, la inecuación se reduce del modo siguiente:

$$\frac{|x|-x}{|x|^3} \leq \frac{1}{2} \iff \frac{x-x}{x^3} \leq \frac{1}{2} \iff 0 \leq \frac{1}{2},$$ 1.0

que es una tautología. Luego la solución es todos los reales de $(0, \infty)$. 0.2

Caso2: Si $x < 0$, la inecuación se reduce del modo siguiente:

$$\frac{|x|-x}{|x|^3} \leq \frac{1}{2} \iff \frac{-x-x}{-x^3} \leq \frac{1}{2} \iff \frac{2}{x^2} - \frac{1}{2} \leq 0 \iff \frac{4-x^2}{x^2} \leq 0$$

$$\iff 4 - x^2 \leq 0,$$ 1.0

que es una inecuación cuadrática, que en $\mathbb{R}$ tendría solución $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$, pero en este intervalo de trabajo tiene solución solo los reales de $(-\infty, -2]$. 0.2

Caso3: $x = 0$ no es solución de la inecuación, ya que no se puede dividir por cero. 0.4
Conclusión: La solución son todos los reales de $(-\infty, -2] \cup (0, \infty)$. 0.2

(b) **(3 pts)** Encuentre la ecuación de la circunferencia con centro en el eje OX, que pasa por los puntos $(1,0)$ y $(0,2)$. Indique claramente el radio y la ubicación del centro en un gráfico esquemático.

Solución: El centro tiene coordenadas $(c,0)$, donde c es desconocido. Si llamamos r al radio, la ecuación es de la forma

$$(x-c)^2 + y^2 = r^2.$$ 0.7

Como debe pasar por $(1,0)$ y $(0,2)$ se deben cumplir las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{c|}(1-c)^2 + 0^2 = r^2 \\ (0-c)^2 + 2^2 = r^2 \\ \hline\end{array}$$ 0.8

OBS: También se puede llegar a estas ecuaciones imponiendo igualdad de distancias entre $(c,0)$ y los puntos dados.

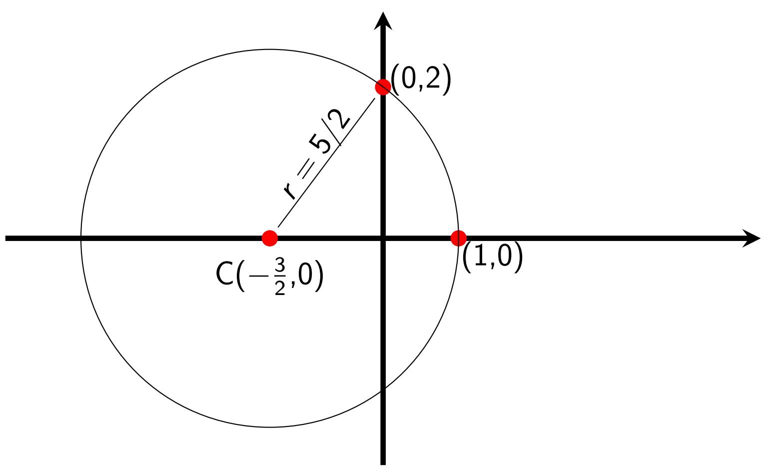
es decir (desarrollando)

$$\begin{array}{c|}1-2c+c^2 = r^2 \\ 4 + c^2 = r^2 \\ \hline\end{array}$$

restando se obtiene que $3+2c=0$, es decir, $c=-3/2$. 0.5

Reemplazando este valor arriba, se obtiene $r^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$, o sea $r = \frac{5}{2}$. 0.5

Estos valores se muestran en la figura siguiente:



0.5