Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Cálculo MA1001-2023-2

Control 2 - recuperativo

P1. Considere una función f, definida por $f(x) = \ln\left(\sqrt{3\exp(\frac{x}{2}) - 2}\right)$.

a) (3.0 pts) Encuentre su dominio $\mathrm{Dom}(f)$, imagen $\mathrm{Im}(f)$, ceros y signos de f.

Solución: Tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \ln\left(\sqrt{3\exp\left(\frac{x}{2}\right) - 2}\right) \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \mid 3\exp\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \geq 0\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \mid 3\exp\left(\frac{x}{2}\right) \geq 2\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exp\left(\frac{x}{2}\right) \geq \frac{2}{3}\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{2} \geq \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

(0.5 pts)

Por lo tanto,

$$\mathrm{Dom}(f) = \left(2\ln\left(\frac{2}{3}\right), \infty\right).$$

(0.5 pts)

Por otro lado,

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ tal que } f(x) = y\}.$$

La función $f(x)$ es el logaritmo natural de la raíz cuadrada de una función exponencial. Dado que la función exponencial siempre produce valores positivos y la raíz cuadrada también produce valores no negativos, el argumento del logaritmo siempre es positivo. **(0.5 pts)**

Por lo tanto,

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

(0.5 pts).

Para encontrar los ceros de $f(x)$, necesitamos resolver la ecuación:

$$\ln\left(\sqrt{3\exp\left(\frac{x}{2}\right) - 2}\right) = 0$$

Esto ocurre cuando el argumento del logaritmo es igual a 1. Resolviendo:

$$\sqrt{3\exp\left(\frac{x}{2}\right)-2}=1$$

Simplificando:

$$3\exp\left(\frac{x}{2}\right)-2=1$$

$$3\exp\left(\frac{x}{2}\right)=3$$

$$\exp\left(\frac{x}{2}\right)=1$$

Esto sucede cuando $x=0$. Por lo tanto, el único cero de $f(x)$ es $x=0$. **(0.5 pts)**

Para analizar los signos de $f(x)$, consideramos las desigualdades que derivamos al definir el dominio:

- $x<2\ln(2/3)$: En este rango, $f(x)$ es negativa.
- $x>2\ln(2/3)$: En este rango, $f(x)$ es positiva.

Entonces, $f(x)$ es negativa en $(-\infty, 2\ln(2/3))$ y positiva en $(2\ln(2/3),\infty)$. **(0.5 pts)**

b) (2.0 pts) Muestre que f es inyectiva en su dominio, concluya que existe $f^{-1}:\mathbf{Im}(f)\to \mathrm{Dom}(f)$ y encuentre una expresión para $f^{-1}(x)$.

Solución: Para demostrar que f es inyectiva en su dominio, asumimos dos valores arbitrarios x_1 y x_2 en el dominio de f y mostramos que si $f(x_1)=f(x_2)$, entonces $x_1=x_2$. **(0.25 pts)**

Supongamos que $f(x_1)=f(x_2)$. Entonces,

$$\ln\left(\sqrt{3\exp\left(\frac{x_1}{2}\right)-2}\right)=\ln\left(\sqrt{3\exp\left(\frac{x_2}{2}\right)-2}\right)$$

Eliminando el logaritmo natural en ambos lados:

$$\sqrt{3\exp\left(\frac{x_1}{2}\right)-2}=\sqrt{3\exp\left(\frac{x_2}{2}\right)-2}$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación:

$$3\exp\left(\frac{x_1}{2}\right)-2=3\exp\left(\frac{x_2}{2}\right)-2$$

Cancelando los términos comunes:

$$\exp\left(\frac{x_1}{2}\right)=\exp\left(\frac{x_2}{2}\right)$$

Tomando logaritmo natural en ambos lados:

$$\frac{x_1}{2}=\frac{x_2}{2}$$

(0.25 pts)

Multiplicando por 2:

$$x_1=x_2$$

Por lo tanto, f es inyectiva. **(0.5 pts)**

Dado que f es inyectiva, existe su función inversa f^{-1}. **(0.25 pts)**

Ahora, busquemos la expresión para $f^{-1}(x)$. Para esto, intercambiamos x e y en la ecuación original y resolvemos para y:

$$\ln\left(\sqrt{3\exp\left(\frac{y}{2}\right)-2}\right)=x$$

Eliminamos el logaritmo natural:

$$\sqrt{3\exp\left(\frac{y}{2}\right)-2}=e^{x}$$

Elevamos al cuadrado ambos lados:

$$3\exp\left(\frac{y}{2}\right)-2=e^{2x}$$

Resolvemos para y:

$$\exp\left(\frac{y}{2}\right)=\frac{e^{2x}+2}{3}$$

Tomamos logaritmo natural en ambos lados:

$$\frac{y}{2}=\ln\left(\frac{e^{2x}+2}{3}\right)$$

Multiplicamos por 2:

$$y=2\ln\left(\frac{e^{2x}+2}{3}\right)$$

(0.25 pts)

Entonces, la expresión para $f^{-1}(x)$ es:

$$f^{-1}(x)=2\ln\left(\frac{e^{2x}+2}{3}\right)$$

(0.5 pts)

c) (1.0 pto) Muestre que f es estrictamente creciente.

Solución: Sean $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f)$ con $x_1 < x_2$. Luego, dado que la función exponencial es estrictamente creciente, se tiene que

$$\exp\left(\frac{x_1}{2}\right)<\exp\left(\frac{x_2}{2}\right).$$

(0.25 pts)

Por otro lado, como la raíz cuadrada también es estrictamente creciente, podemos afirmar que:

$$\sqrt{3\exp\left(\frac{x_1}{2}\right)-2}<\sqrt{3\exp\left(\frac{x_2}{2}\right)-2}.$$

(0.25 pts)

Finalmente, como la función logaritmo natural es creciente en $(0,\infty)$, se deduce que:

$$\ln\left(\sqrt{3\exp\left(\frac{x_1}{2}\right)-2}\right)<\ln\left(\sqrt{3\exp\left(\frac{x_2}{2}\right)-2}\right).$$

(0.25 pts)

Por lo tanto, podemos concluir que $f(x_1) < f(x_2)$, es decir, la función f es creciente. **(0.25 pts)**

P2. *a*) (3.0 pts) Considere un triángulo cuyos ángulos interiores son x, y y z. Pruebe que en el triángulo se tiene

$$\tan(x) + \tan(y) + \tan(z) = \tan(x)\tan(y)\tan(z).$$

Indicación: Escriba z en términos de x e y, y elimine una variable.

Solución: Para demostrar la identidad dada, debemos notar que como x, y y z son ángulos interiores del triángulo se tiene que $x + y + z = \pi$. **(0.5 pts)**
Luego,

$$\begin{aligned}
\tan(x) + \tan(y) + \tan(z) = \tan(x)\tan(y)\tan(z) &\Leftrightarrow \tan(x) + \tan(y) + \tan(\pi - x - y) = \tan(x)\tan(y)\tan(\pi - x - y)\\
&\Leftrightarrow \tan(x) + \tan(y) = \tan(x)\tan(y)\tan(\pi - x - y) - \tan(\pi - x - y)\\
&\Leftrightarrow \tan(x) + \tan(y) = \tan(\pi - x - y)\,(\tan(x)\tan(y) - 1)\\
&\Leftrightarrow \frac{\tan(x) + \tan(y)}{\tan(x)\tan(y) - 1} = \tan(\pi - x - y)
\end{aligned}$$

(0.5 pts)

Con ello la identidad pasa a ser una identidad de dos variables.
Para continuar usamos el hecho que $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ y así

$$\begin{aligned}
\frac{\tan(x) + \tan(y)}{\tan(x)\tan(y) - 1} &= \frac{\tan(x) + \tan(y)}{\tan(x)\tan(y) - 1} \cdot \frac{\cos(x)\cos(y)}{\cos(x)\cos(y)} && \textbf{(0.5 pts)}\\
&= \frac{\sin(x)\cos(y) + \text{sen}(y)\cos(x)}{\sin(x)\sin(y) - \cos(x)\cos(y)}\\
&= \frac{\sin(x + y)}{-\cos(x + y)} && \textbf{(0.5 pts)}\\
&= -\tan(x + y)\\
&= \tan(-x - y) && \textbf{(0.5 pts)}\\
&= \tan(\pi - x - y), && \textbf{(0.5 pts)}
\end{aligned}$$

donde su usó el hecho que tan es impar y periódica de periodo π.

b) (3.0 pts) Encuentre todos los valores $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$4\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 3.$$

Solución: Consideremos el cambio de variables $y = \frac{x}{4}$. **(0.5 pts)**
Luego, la ecuación dada se transforma en:

$$\begin{aligned}
3 &= 4\sin(y) + 2\cos(2y)\\
&= 4\sin(y) + 2\left(1 - 2\sin^2(y)\right)\\
&= 4\sin(y) + 2 - 4\sin^2(y).
\end{aligned}$$

(0.5 pts)

Reorganizando la ecuación resultante, obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= 2\sin^2(y) - 4\sin(y) + 1 \\ &= (2\sin(y) - 1)^2 . \end{aligned}$$

(0.5 pts)

Esto indica que la ecuación es equivalente a resolver $\sin(y) = \frac{1}{2}$. **(0.5 pts)**

Resolviendo la ecuación, se obtiene:

$$\begin{aligned} y &= (-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi \\ &= (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, \end{aligned}$$

(0.5 pts)

donde $k \in \mathbb{Z}$. Finalmente, recordando que $x = 4y$, se tiene:

$$x = 4y = (-1)^k \frac{2\pi}{3} + 4k\pi, \quad \text{para } k \in \mathbb{Z}.$$

(0.5 pts)

P3. *a*) (3.0 pts) Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}_+$. Sea a una cota inferior de A y b una cota inferior de B. Demuestre que $a + b$ es una cota inferior del conjunto $\{x + y \mid x \in A, y \in B\}$, denotado por $A + B$. Calcule $\text{ínf}\,(A + B)$ en términos de $\text{ínf}(A)$ y de $\text{ínf}(B)$.

Solución: Para demostrar que $a + b$ es una cota inferior del conjunto $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$, primero, notemos que a es una cota inferior de A, lo que significa que $a \leq x$ para todo $x \in A$. De manera similar, b es una cota inferior de B, lo que implica que $b \leq y$ para todo $y \in B$.

(0.5 pts)

Ahora, tomemos cualquier elemento z en $A + B$. Por definición, z se puede expresar como la suma de un elemento de A y un elemento de B, es decir, $z = x + y$ para algunos $x \in A$ e $y \in B$. Dado que $a \leq x$ y $b \leq y$, podemos sumar estas desigualdades para obtener $a + b \leq x + y = z$.
Esto muestra que $a + b$ es una cota inferior de $A + B$.

(0.5 pts)

Ahora, para calcular $\text{ínf}(A + B)$, necesitamos encontrar la mayor cota inferior de $A + B$. Dado que $a + b$ es una cota inferior de $A + B$, vamos mostrar que no hay una cota inferior mayor.

(0.5 pts)

Supongamos que c es otra cota inferior de $A + B$, es decir, $c \leq x + y$ para todo $x \in A$ e $y \in B$. En particular, esto implica que $c - b \leq x$ para todo $x \in A$ (simplemente restando b de ambos lados). Dado que a es la cota inferior más grande de A, tenemos $a \leq c - b$.

(0.5 pts)

Ahora, para cualquier $z = x + y$ en $A + B$, tenemos $c \leq x + y$, y al restar b de ambos lados, obtenemos $c - b \leq x$. Por lo tanto, $a \leq c - b \leq x$ para todo $z = x + y$ en $A + B$. Esto significa que a es una cota inferior de $A + B$.
En resumen, hemos demostrado que $a + b$ es una cota inferior de $A + B$ y que no hay una cota inferior mayor. Por lo tanto, $\text{ínf}(A + B) = a + b$.

(0.5 pts)

En términos de $\text{ínf}(A)$ y $\text{ínf}(B)$, podemos decir que $a = \text{ínf}(A)$ y $b = \text{ínf}(B)$, por lo que $\text{ínf}(A + B) = \text{ínf}(A) + \text{ínf}(B)$.

(0.5 pts)

b) (3.0 pts) Sea f una función creciente cuyo dominio es el intervalo $[0, 1]$. Demuestre que el conjunto $f([0, 1])$

es acotado superiormente. Calcule el supremo del conjunto $f([0,1])$ y determine si posee máximo.

Solución: Para demostrar que el conjunto $f([0,1])$ es acotado superiormente, primero recordemos que una función creciente en un intervalo $[a,b]$ significa que, para cualesquiera x_1 y x_2 en el intervalo, si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$.

(0.6 pts)

Ahora, para demostrar que $f([0,1])$ es acotado superiormente, observemos que, dado que f es creciente en $[0,1]$, el valor más grande que puede tomar f es $f(1)$. Por lo tanto, $f([0,1])$ está acotado superiormente por $f(1)$.

(0.6 pts)

Para calcular el supremo del conjunto $f([0,1])$, recordemos que el supremo es el menor de los límites superiores. En este caso, el supremo será $f(1)$.

(0.6 pts)

Ahora, para determinar si $f([0,1])$ tiene un máximo, necesitamos verificar si existe un c en $[0,1]$ tal que $f(c)$ sea el máximo valor de f en ese intervalo.

(0.6 pts)

Sin embargo, dado que hemos demostrado que $f([0,1])$ está acotado superiormente por $f(1)$, sabemos que $f([0,1])$ tiene un supremo que es $f(1)$.

(0.6 pts)

Duración: 3h.