Control 1 - recuperativo

P1. *a)* (3.0 pts) Sean a, b y c números reales positivos. Pruebe que si $a+b+c=1$ y a, b, $c \neq 0$ entonces

$$8 \leq (a^{-1}-1)\cdot(b^{-1}-1)\cdot(c^{-1}-1).$$

Indicación: puede usar que para todo a, b, $c \in (0,+\infty)$ se tiene

$$8\cdot a\cdot b\cdot c \leq (a+b)\cdot(a+c)\cdot(b+c).$$

Solución: Al expandir el lado derecho de la desigualdad tenemos:

$$\begin{aligned}(a^{-1}-1)\cdot(b^{-1}-1)\cdot(c^{-1}-1) &= \left(\frac{1}{a}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{b}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{c}-1\right) && \textbf{(0.3 pts)}\\ &= \left(\frac{1-a}{a}\right)\cdot\left(\frac{1-b}{b}\right)\cdot\left(\frac{1-c}{c}\right)\\ &= \frac{(1-a)\cdot(1-b)\cdot(1-c)}{a\cdot b\cdot c}, && \textbf{(0.7 pts)}\end{aligned}$$

donde se ha utilizado

1° la definición de a^{-1}, b^{-1} y c^{-1}.

2° Propiedades adicionales.

Como $a+b+c=1$ se tiene que

$$1-a=b+c, \quad 1-b=a+c, \quad 1-c=b+a. \tag{1}$$

(0.6 pts)

Incorporando las últimas igualdades de (1) en

$$\frac{(1-a)\cdot(1-b)\cdot(1-c)}{a\cdot b\cdot c},$$

se deduce que

$$\begin{aligned}(a^{-1}-1)\cdot(b^{-1}-1)\cdot(c^{-1}-1) &= \frac{(1-a)\cdot(1-b)\cdot(1-c)}{a\cdot b\cdot c}\\ &= \frac{(b+c)\cdot(a+c)\cdot(b+a)}{a\cdot b\cdot c} && \textbf{(0.6 pts)}\\ &\geq \frac{8a\cdot b\cdot c}{a\cdot b\cdot c}=8, && \textbf{(0.8 pts)}\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos ocupado la indicación.

b) (3.0 pts) Resuelva la inecuación $\dfrac{|1-x|-1}{1-x^2} \geq 0$.

Solución: Tenemos las siguientes restricciones

$$x \neq 1 \quad \text{y} \quad x \neq -1.$$

Notamos que

<u>Caso 1: $x < 1$.</u> En este caso $|1-x| = 1-x$ **(0.3 pts)**, y por lo tanto la inecuación queda

$$\begin{aligned}
\frac{|1-x|-1}{1-x^2} \geq 0 &\iff \frac{1-x-1}{1-x^2} \geq 0 \\
&\iff \frac{-x}{1-x^2} \geq 0 \\
&\iff \frac{x}{1-x^2} \leq 0 \\
&\iff \frac{x}{1+x} \leq 0 \text{ puesto que } 1-x > 0.
\end{aligned}$$

(0.4 pts)

Y esto ocurre cuando

$$(x \geq 0 \ \wedge \ 1+x < 0) \ \vee \ (x \leq 0 \ \wedge \ 1+x > 0).$$

(0.2 pts)

En el primer caso

$$x \geq 0 \ \wedge \ x < -1,$$

es decir, en el primer caso el conjunto solución es $\emptyset$. En el segundo caso,

$$x \leq 0 \ \wedge \ x > -1.$$

Es decir, en el segundo caso $x \in (-1, 0]$. En resumen,

$$x \in (-1, 0] \cup \emptyset = (-1, 0].$$

(0.2 pts)

Así, en este caso el conjunto solución es

$$(-\infty, 1) \cap (-1, 0] = (-1, 0].$$

(0.3 pts)

<u>Caso 1: $x > 1$.</u> En este caso $|1-x| = -(1-x) = x-1$ **(0.3 pts)**, y por lo tanto la inecuación queda

$$\begin{aligned}
\frac{|1-x|-1}{1-x^2} \geq 0 &\iff \frac{-(1-x)-1}{1-x^2} \geq 0 \\
&\iff \frac{-1+x-1}{1-x^2} \geq 0 \\
&\iff \frac{x-2}{1-x^2} \geq 0 \\
&\iff \frac{x-2}{1+x} \leq 0 \text{ puesto que } 1-x < 0.
\end{aligned}$$

(0.4 pts)

Y esto ocurre cuando

$$(x-2 \geq 0 \quad \wedge \quad 1+x<0) \quad \vee \quad (x-2 \leq 0 \quad \wedge \quad 1+x>0).$$

(0.2 pts)

En el primer caso

$$x \geq 2 \quad \wedge \quad x<-1,$$

es decir, en el primer caso el conjunto solución es $\emptyset$. En el segundo caso,

$$x \leq 2 \quad \wedge \quad x>-1.$$

Es decir, en el segundo caso $x \in (-1,2]$. En resumen,

$$x \in (-1,2] \cup \emptyset = (-1,2].$$

(0.2 pts)

Así, en este caso el conjunto solución es

$$(1,+\infty) \cap (-1,2] = (1,2].$$

(0.3 pts)

Finalmente, el conjunto solución global es la unión de los conjuntos encontrados para cada caso, esto es

$$(-1,0] \cup (1,2].$$

(0.2 pts)

P2. *a)* Considere la parábola de ecuación $y^2 = 4x$. Determinar el/los valores de m para los cuales la recta de ecuación $y = mx+2$

i) (1.0 pto) intersecta a la parábola en más de un punto.

ii) (1.0 pto) es tangente a la parábola.

iii) (1.0 pto) no intersecta a la parábola.

Solución: Como buscamos los valores de m en los que la recta $y = mx+2$ corta a la parábola, incorporando la condición $y = mx+2$ a la ecuación de la parábola obtenemos que

$$(mx+2)^2 = 4x. \tag{2}$$

(0.2 pts)

Al expandir el lado izquierdo de la igualdad se obtiene:

$$(mx+2)^2 = m^2x^2 + 4mx + 4.$$

Incorporando esto en (2) obtenemos

$$m^2x^2 + 4mx + 4 = 4x.$$

Cancelando el término $4x$, se llega a la ecuación

$$m^2x^2 + 4(m-1)x + 4 = 0.$$ **(0.2 pts)**

Esta ecuación cuadrática en x tiene discriminante Δ igual a

$$\Delta = (4(m-1))^2 - 16m^2,$$

es decir

$$\Delta = 16(1-2m). \qquad \textbf{(0.2 pts)}$$

i) Si queremos que la recta intersecte a la parábola en dos puntos, se debe imponer que la ecuación cuadrática tenga dos soluciones reales, es decir, estamos buscando los valores de m para los cuales $\Delta > 0$ **(0.2 pts)**, esto es

$$1 - 2m > 0 \iff m < \frac{1}{2}. \qquad \textbf{(0.2 pts)}$$

ii) Ahora, si queremos que la recta sea tangente a la parábola, se debe imponer que la ecuación cuadrática tenga una solución, es decir, estamos buscando los valores de m para los cuales $\Delta = 0$ **(0.4 pts)**, esto es

$$1 - 2m = 0 \iff m = \frac{1}{2}. \qquad \textbf{(0.6 pts)}$$

iii) Finalmente, la recta no intersecta a la parábola si $\Delta < 0$ **(0.4 pts)**, es decir

$$1 - 2m < 0 \iff m > \frac{1}{2}. \qquad \textbf{(0.6 pts)}$$

b) (3.0 pts) Sea $a > 0$. Determinar el lugar geométrico de todos los puntos $P = (x, y)$ tales que son los puntos medios de todas las cuerdas de la circunferencia

$$\mathcal{C}\colon x^2 + y^2 = a^2$$

con un extremo en $A = (a, 0)$.
<u>Indicación:</u> una cuerda es un segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.

Solución: Sean $P = (x, y)$ un punto del lugar geométrico ($\mathcal{L}_g$), y $B = (x_B, y_B)$ el otro extremo de la cuerda. Como $P \in \mathcal{L}_g$ entonces

$$x = \frac{a + x_B}{2}, \quad y = \frac{0 + y_B}{2}. \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

De estas últimas igualdades, se sigue que

$$x_B = 2x - a, \quad \text{y} \quad y_B = 2y. \qquad \textbf{(0.4 pts)}$$

Ahora, como B pertenece a la circunferencia $\mathcal{C}$, debe satisfacer la ecuación, esto es

$$x_B^2 + y_B^2 = a^2,$$

equivalentemente

$$(2x - a)^2 + (2y)^2 = a^2. \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

Al expandir el lado izquierdo se obtiene

$$4x^2 - 4ax + a^2 + 4y^2 = a^2. \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

Cancelando los términos semejantes se llega a la ecuación

$$4x^2 - 4ax + 4y^2 = 0. \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

Completando cuadrados en la ecuación precedente, obtenemos

$$4\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + 4y^2 = 4\left(\frac{a}{2}\right)^2. \qquad \textbf{(0.6 pts)}$$

Finalmente, al dividir por 4 la última expresión se obtiene que

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2. \qquad \textbf{(0.2 pts)}$$

Luego, el lugar geométrico pedido es una circunferencia con centro en $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ y de radio $r = \frac{a}{2}$.
(0.2 pts)

P3. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{|x+1|}}$.

a) (2.0 pts) Determine el dominio y los ceros de f.

Solución: Observando que $-1 \notin \text{Dom}(f)$, y considerando que $x \neq -1$, buscamos números reales x tales que

$$1 - \frac{1}{|x+1|} \geq 0, \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

o equivalentemente

$$1 \geq \frac{1}{|x+1|}. \qquad \textbf{(0.2 pts)}$$

Como $|x+1| > 0$, se tiene:

$$|x+1| \geq 1.$$

Y esto ocurre cuando

$$x + 1 \geq 1 \quad \vee \quad x + 1 \leq -1,$$

esto es

$$x \geq 0 \quad \vee \quad x \leq -2. \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

Entonces

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, -2] \cup [0, \infty). \qquad \textbf{(0.2 pts)}$$

Los ceros de esta función corresponden a los elementos $x \in \text{Dom}\,(f)$ tales que $f\,(x) = 0$. En este caso, observamos que

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{1}{|x+1|}} = 0 \qquad \textbf{(0.2 pts)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x+1| - 1}{|x+1|} = 0 \qquad \textbf{(0.2 pts)}$$

$$\Leftrightarrow |x+1| = 1 \qquad \textbf{(0.2 pts)}$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 1 \quad \vee \quad x + 1 = -1 \qquad \textbf{(0.2 pts)}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = -2.$$

Entonces, $x = 0$ y $x = -2$ son los ceros de la función. **(0.2 pts)**

b) (1.0 pto) Analice la paridad de esta función.

Solución: Como el dominio de f no es simétrico respecto $0 \in \mathbb{R}$, la función no puede ser par ni impar. **(1.0 pto)**

c) (1.0 pto) Determine los intervalos donde esta función es creciente o decreciente, según corresponda.

Solución: En primer lugar, notamos que la función es creciente en $[0, \infty)$. En efecto, sean $x, y \in [0, \infty)$, con $x < y$. En este caso $|x+1| = x+1$ y $|y+1| = y+1$ **(0.2 pts)**. Como $0 \leq x < y$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 < 1 \leq x+1 < y+1 &\Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{x+1} > \frac{1}{y+1} > 0 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{x+1} < -\frac{1}{y+1} < 0 \\ &\Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{1}{x+1} < 1 - \frac{1}{y+1} < 1 \\ &\Rightarrow \sqrt{1 - \frac{1}{x+1}} = f(x) < f(y) = \sqrt{1 - \frac{1}{y+1}}, \end{aligned}$$

(0.3 pts)

puesto que la función raíz cuadrada es creciente en $[0, \infty)$. Entonces $f(x) < f(y)$, es decir f es creciente en $[0, \infty)$.

Ahora, observemos que la función es decreciente en $(-\infty, -2]$. En efecto, sea $x < y \leq -2$. En este caso

$x+1 < y+1 \leq -1 < 0$. Por lo tanto, $|x+1| = -x-1$ y $|y+1| = -y-1$ **(0.2 pts)**. Así tenemos

$$\begin{aligned} x < y \leq -2 &\Leftrightarrow -x > -y \geq 2 \\ &\Leftrightarrow -x-1 > -y-1 \geq 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{-x-1} < \frac{1}{-y-1} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 0 > -\frac{1}{-x-1} > -\frac{1}{-y-1} \geq -1 \\ &\Leftrightarrow 1 > 1 - \frac{1}{-x-1} > 1 - \frac{1}{-y-1} \geq 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{1 - \frac{1}{-y-1}} < \sqrt{1 - \frac{1}{-x-1}}, \end{aligned}$$

(0.3 pts)

puesto que la función raíz cuadrada es creciente en $[0, \infty)$. Entonces $f(y) < f(x)$, es decir f es decreciente en $(-\infty, -2]$.

d) (1.0 pto) Determine $\text{Im}(f)$.

Solución: Primero, observemos que para todo $x \in \text{Dom}(f)$, se tiene que

$$1 > 1 - \frac{1}{|x+1|} \geq 0.$$

Aplicando raíz cuadrada y considerando que la función raíz cuadrada es estrictamente creciente en el conjunto $[0, \infty)$ se tiene que:

$$1 > \sqrt{1 - \frac{1}{|x+1|}} \geq 0.$$ **(0.2 pts)**

Luego,

$$0 \leq f(x) < 1,$$

por lo que

$$\text{Im}(f) \subseteq [0, 1).$$

(0.1 pts)

Sea ahora, $y \in [0, 1)$, es decir $0 \leq y < 1$. Observamos que

$$\begin{aligned} 0 \leq y < 1 &\Leftrightarrow 0 \leq y^2 < 1 \\ &\Leftrightarrow -1 < -y^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < 1 - y^2 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{1-y^2} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{1-y^2} - 1 \geq 0. \end{aligned}$$

(0.2 pts)

Sea $x = \frac{1}{1-y^2} - 1$, y notamos que

$$f(x) = y.$$

(0.2 pts)

Entonces $y \in \mathrm{Im}(f)$, es decir,

$$[0, 1) \subseteq \mathrm{Im}(f).$$

(0.1 pts)

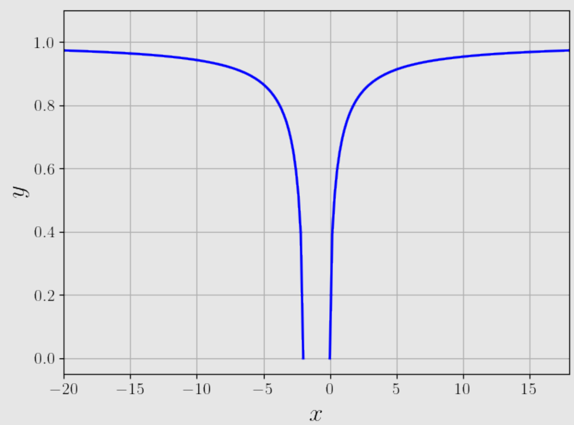
Por lo tanto,

$$[0, 1) = \mathrm{Im}(f).$$

(0.2 pts)

e) (1.0 pto) Dibuje un bosquejo de la gráfica de f que represente sus respuestas de las partes anteriores.

Solución: El bosquejo debe considerar el dominio **(0.4 pts)**, ceros **(0.2 pts)** y monotonía **(0.4 pts)** de la función de acuerdo a las respuestas de las partes anteriores.



Duración: 3h.