Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Cálculo MA1001-2023-2

Control 3

P1. *a)* Considere la sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$s_n = \frac{n^2}{2n^2+1}.$$

i) (3.0 pts) Use la definición de convergencia para demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2}.$$

Solución: Para demostrar que $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to \frac{1}{2}$, debemos garantizar que para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq n_0, \quad \left| s_n - \frac{1}{2} \right| \leq \varepsilon.$$

(0.3 pts)

Sea $\varepsilon > 0$ y estimemos la diferencia $\left|s_n - \frac{1}{2}\right|$. Observamos que

$$\left| s_n - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{n^2}{2n^2+1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n^2 - 2n^2 - 1}{2(2n^2+1)} \right| = \frac{1}{2(2n^2+1)}.$$

(1.5 pts)

Así que $\left|s_n - \frac{1}{2}\right| \leq \varepsilon$ es equivalente a

$$4n^2 + 2 \geq \frac{1}{\varepsilon},$$

(0.3 pts)

esta última desigualdad será cierta si

$$n^2 \geq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 2\right),$$

así,

$$n \geq \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}.$$

(0.3 pts)

Por lo tanto, si $n_0 > \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$ (el cual existe por la propiedad Arquimediana aplicada a $2\sqrt{\varepsilon}$)**(0.4 pts)**, y si $n \geq n_0$ entonces

$$\left| s_n - \frac{1}{2} \right| \leq \varepsilon, \qquad \textbf{(0.2 pts)}$$

que es lo que queríamos demostrar.

ii) (1.0 pto) Encuentre qué tan grande debe ser n para que $\left|s_n - \frac{1}{2}\right| \leq 0{,}0002$.
<u>Indicación:</u> puede usar que $\frac{\sqrt{5000}}{2} \approx 35{,}36$

Solución: Teniendo en cuenta que $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to \frac{1}{2}$, busquemos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq n_0, \quad \left|s_n - \frac{1}{2}\right| \leq 0{,}0002 = \frac{1}{5000}.$$

(0.4 pts)

Esto es

$$\forall n \geq n_0, \quad \left|\frac{n^2}{2n^2+1} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{5000}. \tag{1}$$

Del problema anterior, la última desigualdad es cierta si

$$n \geq \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}},$$

(0.2 pts)

es decir,

$$n \geq \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{5000}}} = \frac{\sqrt{5000}}{2}.$$

(0.2 pts)

Luego, como $\frac{\sqrt{5000}}{2} < 35{,}36$ tenemos que para $n_0 = 36$ **(0.2 pts)**, se tiene la desigualdad (1).

b) (2.0 pts) Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales tal que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to \ell$ con $\ell \in \mathbb{R}$. Demuestre que si $\{a_n - b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$, entonces $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ.

Solución: Para demostrar que $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to \ell$, debemos garantizar que para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq n_0, \quad |b_n - \ell| \leq \varepsilon. \tag{2}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por un lado, como $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to \ell$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\forall n \geq n_1, \quad |a_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(0.5 pts)

De otro lado, como $\{a_n - b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\forall n \geq n_2, \quad |a_n - b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(0.5 pts)

Si consideramos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ **(0.2 pts)**, para todo $n \geq n_0$, vamos a tener que

$$|a_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } |a_n - b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(0.2 pts)

Finalmente, para todo $n \geq n_0$ se tiene

$$\begin{aligned}|b_n - \ell| &= |b_n - a_n + a_n - \ell| \\ &\leq |b_n - a_n| + |a_n - \ell| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

(0.4 pts)

Hemos demostrado así que se cumple (2), y por lo tanto $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to \ell$. **(0.2 pts)**

P2. *a)* Considere $a > 0$ y la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_1 = \sqrt{a}$ y $(\forall n \in \mathbb{N})$ $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$.

i) (1.5 pts) Demuestre que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y no negativa.

Solución: Mediante Inducción, se demostrará que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 \leq x_n \leq x_{n+1}$. **(0.3 pts)**
Esto es cierto cuando $n = 1$, ya que

$$0 \leq x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a + \sqrt{a}} = x_2 \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

puesto que la función raíz cuadrada es creciente. Ahora, suponiendo que la propiedad es cierta para $n \in \mathbb{N}$, se debe probar que es también cierta para $n + 1$. En efecto, como $x_n \geq 0$, se cumple que

$$0 < \sqrt{a} \leq \sqrt{a + x_n} = x_{n+1}. \qquad \textbf{(0.2 pts)}$$

Dado que $x_n \leq x_{n+1}$ y la monotonía de la función raíz cuadrada,

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \leq \sqrt{a + x_{n+1}} = x_{n+2} \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

probando así la tesis inductiva.

En conclusión, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es no negativa y creciente. **(0.2 pts)**

ii) (1.0 pto) Pruebe que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $x_n \leq u$, donde u es la única raíz positiva de la ecuación $u^2 = u + a$.
<u>Indicación:</u> Aplique la condición $u^2 = u + a$ cuando sea necesario.

Solución: Nuevamente se procede por Inducción. En primer lugar, para $n = 1$, se tiene que

$$x_1 = \sqrt{a} \leq \sqrt{a + u} = \sqrt{u^2} = u. \qquad \textbf{(0.4 pts)}$$

Análogamente, si es cierto para $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \leq \sqrt{a + u} = \sqrt{u^2} = u \qquad \textbf{(0.4 pts)}$$

probando que también lo es para $n + 1$.

En conclusión, la sucesión es acotada superiormente por u. **(0.2 pts)**

iii) (1.5 pts) Concluya que la sucesión posee límite y calcúlelo.

Solución: En virtud del Teorema de Sucesiones Monótonas, dado que la sucesión es acotada superiormente y monótona creciente, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. **(0.5 pts)**

Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = L$, aplicando Álgebra de Límites de Sucesiones, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{a + x_n} \\ L &= \sqrt{a+L} \\ L^2 &= a + L \end{aligned} \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

la cual es una ecuación cuadrática que tiene dos soluciones dadas por

$$L = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} \text{ (negativa) y } \; L = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} \text{ (positiva).}$$

(0.3 pts)

Sin embargo, la sucesión es no negativa, por lo que $L \geq 0$. En conclusión,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

(0.4 pts)

$b)$ (2.0 pts) Determine las soluciones de la inecuación $\log_{1/2}\left(x^{\log_{1/2}(x)-2}\right) < 3$.

Solución: Primero, es necesario que $x > 0$ para que la inecuación esté bien definida. **(0.2 pts)**
Aplicando las propiedades del logaritmo, se tiene que

$$\begin{aligned} \log_{1/2}\left(x^{\log_{1/2}(x)-2}\right) &< 3 \\ \left(\log_{1/2}(x) - 2\right)\log_{1/2}(x) &< 3. \end{aligned} \qquad \textbf{(0.4 pts)}$$

Tomando la variable auxiliar $u = \log_{1/2}(x)$, la inecuación a trabajar está dada por

$$\begin{aligned} u(u-2) &< 3 \\ u^2 - 2u - 3 &< 0 \\ (u-3)(u+1) &< 0. \end{aligned} \qquad \textbf{(0.4 pts)}$$

Entonces, $u \in (-1, 3)$. **(0.2 pts)**

Luego, como $\log_{1/2}(\cdot)$ es biyectiva y decreciente (su base es menor que 1), **(0.3 pts)**

$$\begin{aligned} -1 < \log_{1/2}(x) &< 3 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^3 < x &< \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \\ \frac{1}{8} < x &< 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de esta ecuación es $I = \left(\frac{1}{8}, 2\right)$. **(0.5 pts)**

P3. Calcule los siguientes límites:

i) (1.5 pts) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3+7n-2}{n-6n^3}$.

ii) (1.5 pts) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}\right)$

iii) (1.5 pts) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^n$

iv) (1.5 pts) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

Solución:

i) Al dividir por n^3 el numerador y denominador, y usando álgebra de límites, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3+7n-2}{n-6n^3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{7}{n^2}-\frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n^2}-1} && \textbf{(0.5 pts)}\\
&= \frac{5+0-0}{0-1} && \textbf{(0.5 pts)}\\
&= -5 && \textbf{(0.5 pts)}
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \text{ para } k \in \{2,3\}\,.$$

ii) Recordando que

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2},$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n(n+1)}{2(n+2)} - \frac{n}{2}\right) && \textbf{(0.5 pts)}\\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n(n+1)-n(n+2)}{2(n+2)}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2(n+2)} && \textbf{(0.5 pts)}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2n+4}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{2+\frac{4}{n}} && \textbf{(0.3 pts)}\\
&= \frac{-1}{2+0}\\
&= -\frac{1}{2}, && \textbf{(0.2 pts)}
\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos usado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

iii) Observemos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n &= \left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n\left(\frac{3n}{3n}\right)^n \qquad \textbf{(0.3 pts)}\\ &= \left(\frac{3n+1}{3n}\right)^n\left(\frac{3n}{3n-1}\right)^n\\ &= \frac{\left(\frac{3n+1}{3n}\right)^n}{\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^n}. \qquad \textbf{(0.2 pts)}\end{aligned}$$

Ahora, como

$$\left(\frac{3n+1}{3n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{3n}\right)^n \quad \text{y} \quad \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{3n}\right)^n, \qquad \textbf{(0.4 pts)}$$

vamos a tener que

$$\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{3n}\right)^n}.$$

Notando que

1°) el numerador converge a $e^{1/3}$, **(0.2 pts)**

2°) el denominador converge a $e^{-1/3}$, **(0.2 pts)**

por álgebra de límites concluimos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n &= \frac{\exp\left(\frac{1}{3}\right)}{\exp\left(-\frac{1}{3}\right)}\\ &= \exp\left(\frac{1}{3}\right)\exp\left(\frac{1}{3}\right)\\ &= \exp\left(\frac{2}{3}\right). \qquad \textbf{(0.2 pts)}\end{aligned}$$

iv) Observemos que al multiplicar y dividir la expresión, por el radical conjugado se obtiene

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} && \textbf{(0.3 pts)}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2}\left[\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2\right]}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} && \textbf{(0.2 pts)}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2}\left[(n+1)-n\right]}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} && \textbf{(0.2 pts)}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} && \textbf{(0.2 pts)}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}+1}+1\right)} && \textbf{(0.2 pts)}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}. && \textbf{(0.2 pts)}
\end{aligned}
$$

Usando álgebra de límites, como el numerador tiende a 1 y el denominador tiende a $2 \neq 0$, se deduce que

$$
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \frac{1}{2}.
$$

(0.2 pts)

Duración: 3h.