Control 2

P1. Considere una función f, definida por $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$.

a) (3.0 ptos) Encuentre su dominio $\mathrm{Dom}(f)$, imagen $\mathrm{Im}(f)$, ceros y signos de f.

Solución: Tenemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+1}{2x+1} \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2x+1 \neq 0\}.\end{aligned}$$

(0.5 pts)

Notemos que el denominador se anula cuando $2x+1=0$, es decir, cuando $x = -\dfrac{1}{2}$. Por lo tanto,

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}.$$

(0.5 pts)

Por otro lado,

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ tal que } f(x) = y\}.$$

Veamos qué restricción debe satisfacer un $y \in \mathbb{R}$ para que exista un $x \in \mathrm{Dom}(f)$ tal que $y = f(x)$. Esto es,

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff y = \frac{x+1}{2x+1} \qquad \textbf{(0.5 pts)} \\ &\iff y(2x+1) = x+1 \\ &\iff 2xy + y = x+1 \\ &\iff y - 1 = x(1-2y) \\ &\iff x = \frac{y-1}{1-2y}, \end{aligned}$$

donde en el último paso se requiere que $1-2y \neq 0$, es decir, $y \neq \dfrac{1}{2}$. Por lo tanto,

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

(0.5 pts).

Para encontrar los ceros de la función, debemos encontrar los valores $x \in \text{Dom}(f)$ para los cuales $f(x) = 0$. Para ello,

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff \frac{x+1}{2x+1} = 0 \\ &\iff x + 1 = 0 \\ &\iff x = -1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función es igual a cero cuando $x = -1$. **(0.5 pts)**

Finalmente, para determinar los signos de la función, consideremos los puntos críticos $x = -1, -\dfrac{1}{2}$ y evaluemos la función en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, -\frac{1}{2})$ y $(-\frac{1}{2}, \infty)$:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, \infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$2x+1$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{x+1}{2x+1}$	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto, la función es positiva en $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, \infty)$ y negativa en $(-1, -\frac{1}{2})$. **(0.5 pts)**

b) (1.5 ptos) Muestre que f es inyectiva en su dominio, concluya que existe $f^{-1} : \mathbf{Im}(f) \to \text{Dom}(f)$ y encuentre una expresión para $f^{-1}(x)$.

Solución: Veamos primero que $f : \text{Dom}(f) \to \text{Im}(f)$ es inyectiva. Para demostrar la inyectividad, tomamos $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$, y debemos probar que $x_1 = x_2$. Veamos

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\iff \frac{x_1+1}{2x_1+1} = \frac{x_2+1}{2x_2+1} \\ &\iff (x_1+1)(2x_2+1) = (x_2+1)(2x_1+1) \qquad \textbf{(0.3 pts)} \\ &\iff 2x_2 + x_1 = 2x_1 + x_2 \\ &\iff x_2 = x_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es inyectiva. **(0.2 pts)**

Además, como $f : \text{Dom}(f) \to \text{Im}(f)$ es inyectiva y $\text{Cod}(f) = \text{Im}(f)$ (es epiyectiva), entonces f es biyectiva y, por tanto, posee inversa $f^{-1} : \text{Im}(f) \to \text{Dom}(f)$. **(0.5 pts)**

Finalmente, la expresión de f^{-1} se puede encontrar al "despejar"x (cálculos precedentes). Así, para todo $x \in \text{Im}(f)$, vamos a tener que

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{1-2x}.$$

(0.5 pts)

c) (1.5 ptos) Muestre que f es estrictamente decreciente en el intervalo $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[$.

Solución: Veamos que f es decreciente en $(-\infty, -\frac{1}{2})$. Al ser f inyectiva, la desigualdad es automáticamente estricta **(0.5 pts)**.

Sean $x_1, x_2 \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ tales que $x_1 < x_2$ **(0.2 pts)**. Luego,

$$\begin{aligned}
x_2 - x_1 > 0 &\iff (2x_2+1)(x_1+1) - (2x_1+1)(x_2+1) > 0 \qquad \textbf{(0.3 pts)} \quad \text{(Ver desarrollo anterior)}\\
&\iff \frac{(2x_2+1)(x_1+1) - (2x_1+1)(x_2+1)}{(2x_1+1)(2x_2+1)} > 0\\
&\iff \frac{x_1+1}{2x_1+1} - \frac{x_2+1}{2x_2+1} > 0 \qquad \textbf{(0.3 pts)}\\
&\iff f(x_1) > f(x_2).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, f es decreciente en $(-\infty, -\frac{1}{2})$. **(0.2 pts)**

P2. *a)* i) (1.5 ptos) Deduzca la identidad trigonométrica $\csc(2x) - \cot(2x) = \tan(x)$, indicando el máximo dominio de x para que dicha identidad sea válida.

Solución: Primero es importante señalar que $\csc(2x)$, $\cot(2x)$ y $\tan(x)$ están bien definidas cuando

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) \neq 0 \quad \text{y} \quad \cos(x) \neq 0,$$

lo cual se cumple cuando $x \in A = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$ **(0.5pts)**. Luego, para $x \in A$, se cumple que

$$\csc(2x) - \cot(2x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(2x)} - \frac{\cos(2x)}{\operatorname{sen}(2x)}. \qquad \textbf{(0.4 pts)}$$

Aplicando las leyes de ángulos dobles,

$$\begin{aligned}
\csc(2x) - \cot(2x) &= \frac{1}{\operatorname{sen}(2x)} - \frac{\cos(2x)}{\operatorname{sen}(2x)}\\
&= \frac{1}{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)} - \frac{\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)}{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}\\
&= \frac{1 - \big(\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)\big)}{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}. \qquad \textbf{(0.3 pts)}
\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando la propiedad fundamental $(\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1)$,

$$\begin{aligned}
\csc(2x) - \cot(2x) &= \frac{1 - \big(\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)\big)}{2\sin(x)\cos(x)}\\
&= \frac{2\operatorname{sen}^2(x)}{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}\\
&= \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \qquad (1)\\
&= \tan(x) \qquad \textbf{(0.3 pts)}
\end{aligned}$$

probando lo pedido.

ii) (1.5 ptos) Determine las soluciones reales de la ecuación $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = 1$.

Solución: Para resolver este problema dividiendo la ecuación a ambos lados por 2, obtenemos que

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{2}\cos(x). \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

Observando que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ y $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, se cumple que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{2}\cos x \\ &= \operatorname{sen}(x)\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right).\end{aligned} \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

Así, tomando $y = x + \frac{\pi}{6}$, la ecuación se reduce a

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen}(y). \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

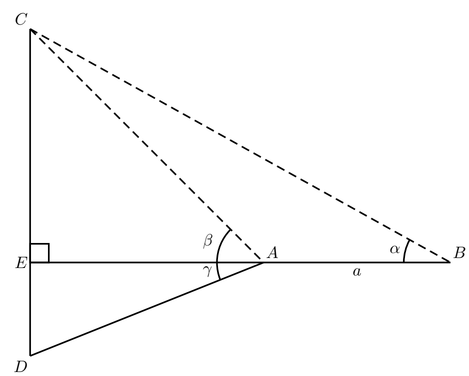
La ecuación posee dos soluciones en $[0, 2\pi)$, dadas por $y = \frac{\pi}{6}$ e $y = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, o sea, las soluciones para x en dicho intervalo son

$$x = 0, \qquad x = \frac{2\pi}{3}. \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

Dado que $\operatorname{sen}(x)$ posee periodo 2π, el conjunto solución de esta ecuación está dado por

$$x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}. \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

b) Considere la siguiente figura, la cual representa a un socavón ($\overline{AE}$) de gran tamaño que apareció en la entrada de un edificio ($\overline{CE}$). Para medir el socavón se usa un instrumento que mide el ángulo de elevación necesario para observar la cima del edificio C y el punto más bajo del socavón D. Desde el punto B, ubicado a una distancia a del socavón, se mide un ángulo de elevación α. Avanzando hacia el borde del socavón, que inicia en A, se mide el ángulo de elevación β hacia la cima del edificio y el ángulo de declinación γ hacia el punto más bajo del socavón ubicado en D.



i) (1.5 ptos) Demuestre que la altura del edificio (longitud de $\overline{CE}$) está dada por $\dfrac{a}{\cot(\alpha) - \cot(\beta)}$.

Solución: En primer lugar, se tiene que $\angle BCA = \beta - \alpha$ y $\angle BAC = \pi - \beta$. Entonces, aplicando el Teorema del Seno en el $\triangle ABC$,

$$\frac{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{|\overline{AC}|} = \frac{\operatorname{sen}(\pi - \beta)}{|\overline{BC}|} \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

pero $\operatorname{sen}(\pi - \beta) = \operatorname{sen}(\beta)$. Entonces,

$$|\overline{AC}| = a\left(\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}\right). \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\left|\overline{EC}\right| = \left|\overline{AC}\right| \operatorname{sen}(\beta) &= a\left(\frac{\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}\right)\\
&= a\left(\frac{\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)-\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)}\right)\\
&= \frac{a}{\dfrac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}-\dfrac{\cos(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta)}} \qquad (2)\\
&= \frac{a}{\cot(\alpha)-\cot(\beta)} \qquad \textbf{(0.5 pts)}
\end{aligned}$$

probando lo pedido.

ii) (1.5 ptos) Demuestre que la amplitud y profundidad del socavón (longitud de $\overline{AE}$ y $\overline{ED}$) están dadas por $\dfrac{a}{\tan(\beta)\cot(\alpha)-1}$ y $\dfrac{a\tan(\gamma)}{\tan(\beta)\cot(\alpha)-1}$, respectivamente.

Solución: Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\left|\overline{AE}\right| &= \left|\overline{AC}\right|\cos\beta \qquad \textbf{(0.5 pts)}\\
&= a\left(\frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}\right)\\
&= a\left(\frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)-\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)}\right)\\
&= \frac{a}{\dfrac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}\left(\dfrac{\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\beta)}\right)-1} = \frac{a}{\cot(\alpha)\tan(\beta)-1}, \qquad \textbf{(0.5 pts)}
\end{aligned}$$

y

$$\left|\overline{ED}\right| = \left|\overline{AE}\right|\tan(\gamma) = \frac{a\tan(\gamma)}{\cot(\alpha)\tan(\beta)-1} \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

que es lo que queríamos demostrar.

P3. *a*) (4.0 ptos) Considere el conjunto A definido por

$$A = \left\{\frac{1}{|m-n|} : m,n\in\mathbb{N}, m\neq n\right\}.$$

Demuestre que $\inf(A) = 0$. ¿Es 0 mínimo de A?
<u>Indicación:</u> use la propiedad arquimediana.

Solución: Notamos que A es un conjunto no vacío, pues al tomar $m = 1$ y $n = 0$ obtenemos que $1 \in A$ **(0.3 pts)**. Para probar que 0 es el infimo de A veamos primero que 0 es cota inferior de A. En efecto, como $m \neq n$, se tiene que $|m-n| > 0$. Es decir,

$$0 < \frac{1}{|m-n|} \text{ para todo } m,n\in\mathbb{N}.$$

Esto muestra que 0 es cota inferior del conjunto A, con lo cual A es acotado inferiormente. Luego, como $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente se concluye que A tiene infimo. **(1.2 pts)**

Ahora, para demostrar que 0 es la mayor cota inferior de A, sea β otra cota inferior de A y veamos que

$\beta \leq 0$ **(0.3 pts)**. Procediendo por contradicción, si $\beta > 0$ por propiedad Arquimediana, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $p\beta > 1$. Esta última desigualdad implica que

$$\beta > \frac{1}{p}.$$

Pero además, observemos que

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{|p-0|} \in A.$$

Es decir, β es más grande que un elemento de A, lo que contradice β es cota inferior de A **(1.2 pts)**. Luego

$$\text{ínf}(A) = 0.$$

Si 0 fuese el mínimo de A, se tendría que $0 \in A$. Pero, si suponemos que $0 \in A$, entonces existen números naturales n, $m \in \mathbb{N}$ con $m \neq n$ tales que

$$\frac{1}{|m-n|} = 0,$$

es decir, $1 = 0$, lo que es imposible **(0.5 pts)**. Luego $0 \notin A$, por lo tanto 0 no es mínimo de A **(0.5 pts)**.

b) Sean $X \subseteq \mathbb{R}$ y $f : X \to \mathbb{R}^+$ una función acotada superiormente. Se define $\sup(f) := \sup(f(X))$, si $\sup(f)$ es finito en tal caso diremos que la función f es acotada superiormente. Demuestre que

i) (1.0 pto) Si $f, g : X \to \mathbb{R}^+$ son acotadas superiormente, entonces $f \cdot g$ también es acotada superiormente.

Solución: Notemos que

$$f \quad \text{es acotada superiormente} \quad \Longleftrightarrow \quad \sup(f) < \infty.$$

En efecto, si f es acotada superiormente entonces existe $M > 0$ tal que

$$f(x) \leq M \quad \forall x \in X.$$

Luego,

$$\sup(f) = \sup\{f(x) \colon x \in X\} < \infty.$$

Ahora, si $\sup(f) < \infty$ entonces para $M = \sup(f) > 0$ tenemos que

$$f(x) \leq M \quad \forall x \in X,$$

de donde concluímos que f es acotada superiormente. **(0.2 pts)**

Como f, g son acotadas, entonces existen M_1, $M_2 > 0$ tales que $0 < f(x) \leq M_1$ y $0 < g(x) \leq M_2$ para todo $x \in X$ **(0.3 pts)**. Luego,

$$f(x) \cdot g(x) \leq M_1 \cdot g(x) \leq M_1 \cdot M_2 \text{ para todo } x \in X.$$

(0.3 pts)

Es decir, $M_1 \cdot M_2$ es una cota superior para $f \cdot g$ **(0.2 pts)**.

ii) (1.0 pto) $\sup(f \cdot g) \leq \sup(f) \cdot \sup(g)$.

Solución: En particular, si $M_1 = \sup(f)$ y $M_2 = \sup(g)$, deducimos que $\sup(f) \cdot \sup(g)$ es un cota superior de $f \cdot g$ **(0.5 pts)**. Por lo tanto

$$\sup(f \cdot g) \leq \sup(f) \cdot \sup(g).$$

(0.5 pts)

Duración: 3h.