Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Cálculo MA1001-2023-2

Control 3

P1. *a)* Considere la sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$s_n = \frac{n^2}{2n^2+1}.$$

i) (3.0 pts) Use la definición de convergencia para demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2}.$$

ii) (1.0 pto) Encuentre qué tan grande debe ser n para que $\left|s_n - \frac{1}{2}\right| \leq 0{,}0002$.
Indicación: puede usar que $\frac{\sqrt{5000}}{2} \approx 35{,}36$

b) (2.0 pts) Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales tal que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to \ell$ con $\ell \in \mathbb{R}$. Demuestre que si $\{a_n - b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$, entonces $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ.

P2. *a)* Considere $a > 0$ y la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_1 = \sqrt{a}$ y $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$.

i) (1.5 pts) Demuestre que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y no negativa.

ii) (1.0 pto) Pruebe que $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \leq u$, donde u es la única raíz positiva de la ecuación $u^2 = u + a$.
Indicación: Aplique la condición $u^2 = u + a$ cuando sea necesario.

iii) (1.5 pts) Concluya que la sucesión posee límite y calcúlelo.

b) (2.0 pts) Determine las soluciones de la inecuación $\log_{1/2}\left(x^{\log_{1/2}(x)-2}\right) < 3$.

P3. Calcule los siguientes límites:

i) (1.5 pts) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3+7n-2}{n-6n^3}$.

ii) (1.5 pts) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right)$

iii) (1.5 pts) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n$

iv) (1.5 pts) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

Duración: 3h.