Control 2

P1. Considere una función f, definida por $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$.

a) (3.0 ptos) Encuentre su dominio $\text{Dom}(f)$, imagen $\text{Im}(f)$, ceros y signos de f.

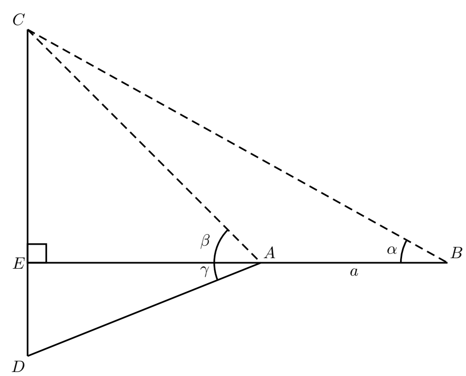
b) (1.5 ptos) Muestre que f es inyectiva en su dominio, concluya que existe $f^{-1} : \textbf{Im}(f) \to \text{Dom}(f)$ y encuentre una expresión para $f^{-1}(x)$.

c) (1.5 ptos) Muestre que f es estrictamente decreciente en el intervalo $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[$.

P2. *a)* i) (1.5 ptos) Deduzca la identidad trigonométrica $\csc(2x) - \cot(2x) = \tan(x)$, indicando el máximo dominio de x para que dicha identidad sea válida.

ii) (1.5 ptos) Determine las soluciones reales de la ecuación $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = 1$.

b) Considere la siguiente figura, la cual representa a un socavón ($\overline{AE}$) de gran tamaño que apareció en la entrada de un edificio ($\overline{CE}$). Para medir el socavón se usa un instrumento que mide el ángulo de elevación necesario para observar la cima del edificio C y el punto más bajo del socavón D. Desde el punto B, ubicado a una distancia a del socavón, se mide un ángulo de elevación α. Avanzando hacia el borde del socavón, que inicia en A, se mide el ángulo de elevación β hacia la cima del edificio y el ángulo de declinación γ hacia el punto más bajo del socavón ubicado en D.



i) (1.5 ptos) Demuestre que la altura del edificio (longitud de $\overline{CE}$) está dada por $\dfrac{a}{\cot(\alpha) - \cot(\beta)}$.

ii) (1.5 ptos) Demuestre que la amplitud y profundidad del socavón (longitud de $\overline{AE}$ y $\overline{ED}$) están dadas por $\dfrac{a}{\tan(\beta)\cot(\alpha) - 1}$ y $\dfrac{a\tan(\gamma)}{\tan(\beta)\cot(\alpha) - 1}$, respectivamente.

P3. *a)* (4.0 ptos) Considere el conjunto A definido por

$$A = \left\{ \frac{1}{|m-n|} : m, n \in \mathbb{N}, m \neq n \right\}.$$

Demuestre que $\text{ínf}(A) = 0$. ¿Es 0 mínimo de A?
Indicación: use la propiedad arquimediana.

b) Sean $X \subseteq \mathbb{R}$ y $f : X \to \mathbb{R}^+$ una función acotada superiormente. Se define $\sup(f) := \sup(f(X))$, si $\sup(f)$ es finito en tal caso diremos que la función f es acotada superiormente. Demuestre que

i) (1.0 pto) Si $f, g : X \to \mathbb{R}^+$ son acotadas superiormente, entonces $f \cdot g$ también es acotada superiormente.

ii) (1.0 pto) $\sup(f \cdot g) \leq \sup(f) \cdot \sup(g)$.

Duración: 3h.