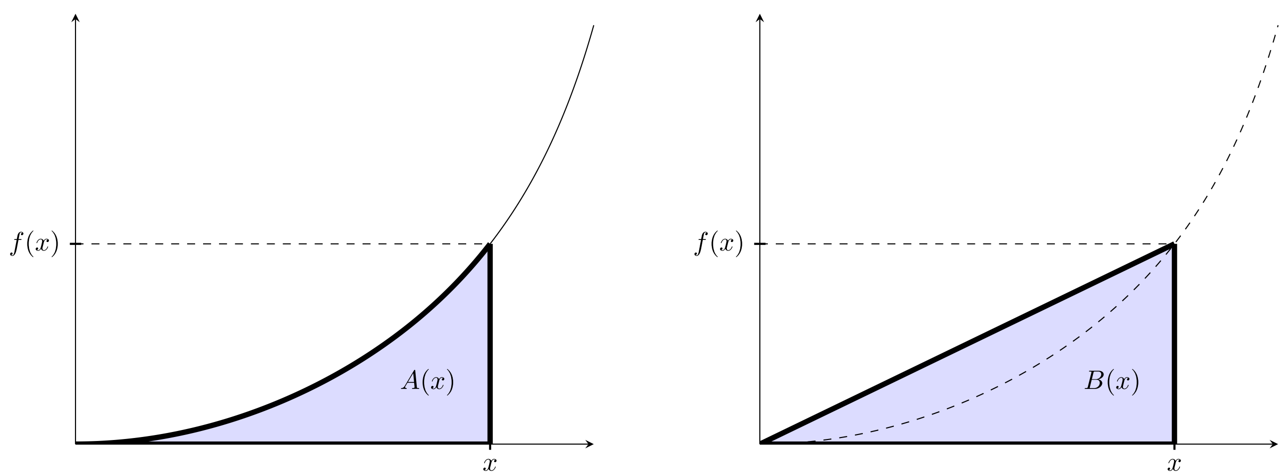
Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1002: Cálculo Diferencial e Integral. 2023-2

Pauta de corrección Control 3

P1. a) **(3,0 pts.)** Considere la función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \tan(t^2)$. Para $x \in [0,1]$, sea $A(x)$ el área bajo la curva de f en el intervalo $[0,x]$, como muestra la Figura 1a. Sea además $B(x)$ el área del triángulo de vértices $(0,0)$, $(x,0)$ y $(x, f(x))$, como muestra la Figura 1b.

Calcule el límite

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{A(x)}{B(x)}.$$



(a) El área $A(x)$.

(b) El área $B(x)$.

Figura 1: Esquema de las áreas consideradas.

Solución

Como f es no negativa, el área bajo f en el intervalo $[0,x]$ se calcula como

$$A(x) = \int_0^x \tan(t^2)\,\mathrm{d}t.$$

(0,3 pts. por escribir la fórmula para el área)

Por otro lado, como $B(x)$ es el área de un triángulo rectángulo de catetos de largo x y $f(x)$, se tiene que

$$B(x) = \frac{x \cdot f(x)}{2} = \frac{x \cdot \tan(x^2)}{2}.$$

(0,2 pts. por calcular el área del triángulo)

Alternativa

También se puede encontrar esta área integrando la función $g(t) = \left(\frac{\tan(x^2)}{x}\right) \cdot t$ en el intervalo $[0,x]$.

Por lo tanto, el límite buscado es

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^x \tan(t^2)\,\mathrm{d}t}{\dfrac{x \cdot \tan(x^2)}{2}} = 2 \lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^x \tan(t^2)\,\mathrm{d}t}{x \cdot \tan(x^2)}.$$

Por TFC, la integral del numerador es continua y vale cero en $x = 0$. Por lo tanto el límite pedido es de la forma $\frac{0}{0}$ y se usará usando la regla de L'Hôpital para su cálculo.

(0,2 pts. por indicar que la integral es continua)

Además, como $\tan(x^2)$ es continua, el TFC establece que la función $A(x)$ también es derivable y que su derivada es $\tan(x^2)$.

(0,8 pts. por verificar la hipótesis del TCF y determinar A')

La derivada del denominador vale $B'(x) = \tan(x^2) + 2x^2 \cdot \sec^2(x^2)$, la cual es diferente de cero en $(0, 1)$.

(0,4 pts. por el cálculo de la derivada)

(0,1 pts. por verificar esta hipótesis de L'Hôpital)

Así,

$$L = 2 \lim_{x \to 0^+} \frac{\tan(x^2)}{\tan(x^2) + 2x^2 \cdot \sec^2(x^2)},$$

siempre que el último límite exista

Este límite se puede calcular de varias maneras **(todas valen 1,0 pto.)**.

Primera forma (Simplificando y usando un límite conocido)

Se tiene que

$$L = 2 \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 + 2x^2 \cdot \dfrac{\sec^2(x^2)}{\tan(x^2)}} = 2 \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 + \dfrac{2x^2}{\operatorname{sen}(x^2) \cdot \cos(x^2)}} = 2 \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 + \dfrac{2}{\cos(x^2)} \cdot \dfrac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2)}}.$$

(0,5 pts. por simplificar)

Del límite conocido $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{h}{\operatorname{sen}(h)} = 1$ resulta que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2)} = 1$ **(0,2 pts. por usar el límite conocido)**, de donde

$$L = 2 \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{2}{\cos(0)}} = \frac{2}{1 + 2} = \frac{2}{3},$$

donde se usó la continuidad del coseno **(0,3 pts. por calcular el límite)**.

Alternativa

También se puede calcular el límite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2) \cdot \cos(x^2)}$$

usando nuevamente la regla de l'Hôpital, pues es de la forma $\frac{0}{0}$, con numerador y denominador derivables, y tal que la derivada de denominador no se anula en intervalo de la forma $(0, \delta)$ con $\delta > 0$. En este caso queda

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2x}{2x \cdot \cos^2(x^2) - 2x \sin^2(x^2)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\cos^2(x^2) - \sin^2(x^2)} = \frac{1}{\cos(0) - \sin(0)} = 1,$$

donde se usó la continuidad del seno y del coseno.

Alternativa

También se puede calcular el límite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2) \cdot \cos(x^2)}$$

usando que

$$\operatorname{sen}(x^2) \cdot \cos(x^2) = \frac{\operatorname{sen}(2x^2)}{2}$$

para llegar a que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2) \cdot \cos(x^2)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x^2}{\operatorname{sen}(2x^2)} = 1,$$

donde se usó nuevamente el límite conocido $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{h}{\operatorname{sen}(h)} = 1$.

Segunda forma (Usando identidades trigonométricas y un límite conocido)

Se tiene que

$$L = 2 \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{\cos(x^2)}}{\dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{\cos(x^2)} + 2x^2 \cdot \dfrac{1}{\cos^2(x^2)}} = 2 \lim_{x\to 0^+} \frac{2\operatorname{sen}(x^2)\cdot\cos(x^2)}{2\operatorname{sen}(x^2)\cdot\cos(x^2) + 4x^2}.$$

(0,2 pts. por simplificar)

Como $2\operatorname{sen}(x^2)\cdot\cos(x^2) = \operatorname{sen}(2x^2)$ resulta que

$$L = 2 \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(2x^2)}{\operatorname{sen}(2x^2)+4x^2} = 2 \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(2x^2)}{2x^2}}{\dfrac{\operatorname{sen}(2x^2)+4x^2}{2x^2}} = 2 \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(2x^2)}{2x^2}}{\dfrac{\operatorname{sen}(2x^2)}{2x^2}+2}.$$

(0,3 pts. por usar la identidad trigonométrica)

Del límite conocido $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1$ resulta que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(2x^2)}{2x^2} = 1$ **(0,2 pts. por usar el límite conocido)**, de donde

$$L = 2\cdot\frac{1}{1+2} = \frac{2}{3}.$$

(0,3 pts. por calcular el límite)

Alternativa

También se puede calcular el límite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(2x^2)}{\operatorname{sen}(2x^2)+4x^2}$$

usando nuevamente la regla de l'Hôpital, pues es de la forma $\frac{0}{0}$, entre con numerador y denominador derivable, y tal que la derivada de denominador no se anula en un intervalo de la forma $(0,\delta)$ con $\delta > 0$. En este caso queda

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{4x\cdot\cos(x^2)}{4x\cdot\cos(x^2)+8x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x^2)}{\cos(x^2)+2} = \frac{\cos(0)}{\cos(0)+2} = \frac{1}{1+2} = \frac{2}{3},$$

donde se usó la continuidad del coseno.

Tercera forma (Usando nuevamente la regla de l'Hôpital y simplificando)

Como el límite L es de la forma $\frac{0}{0}$, entre dos funciones derivables, y tal que la derivada de denominador no se anula en un intervalo de la forma $(0,\delta)$ con $\delta > 0$, se puede usar nuevamente la regla de l'Hôpital.

(0,3 pts. por justificar el uso de la regla de l'Hôpital)

Así, se llega a

$$L = 2 \lim_{x\to 0^+} \frac{2x\cdot\sec^2(x)}{2x\cdot\sec^2(x^2) + 4x\cdot\sec^2(x^2) + 8x^3\cdot\sec^2(x^2)\cdot\tan(x^2)}$$

(0,4 pts. por usar la regla de l'Hôpital)

$$= 2 \lim_{x\to 0^+} \frac{2x\cdot\sec^2(x)}{6x\cdot\sec^2(x^2) + 8x^3\cdot\sec^2(x^2)\cdot\tan(x^2)} = 2 \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3+4x^2\cdot\tan(x^2)} = \frac{2}{3+4\cdot 0\cdot\tan(0)} = \frac{2}{3},$$

donde se usó la continuidad de $x^2\cdot\tan(x^2)$ en $\bar{x} = 0$ **(0,3 pts. por calcular el límite)**.

b) **(3,0 pts.)** Considere la *espiral de Arquímedes* definida en coordenadas polares por la ecuación $r = \phi$, para $\phi \in [0, 4\pi]$, (dos vueltas completas).

Calcule el área de la región encerrada entre la primera y segunda vuelta de esta curva. Es decir, el área de la región sombreada en la Figura 2.

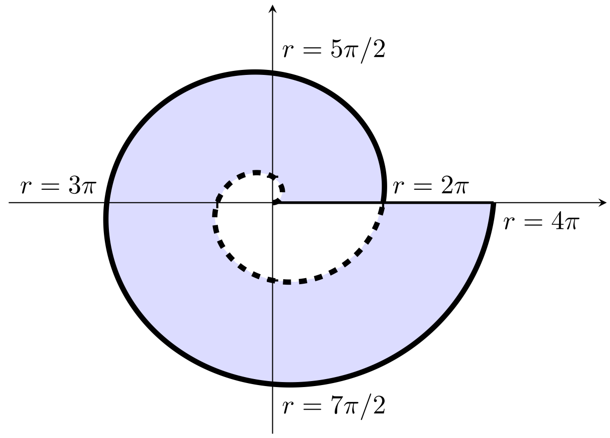
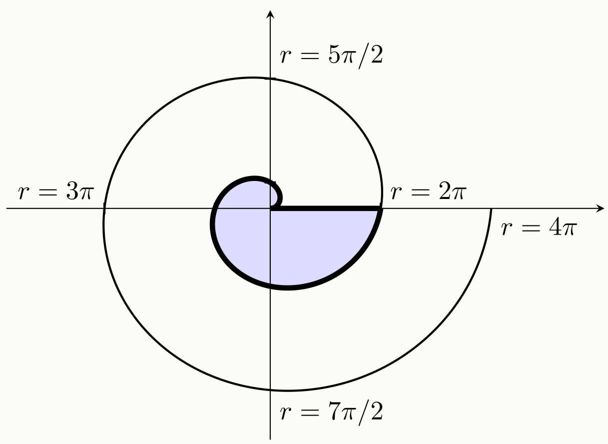


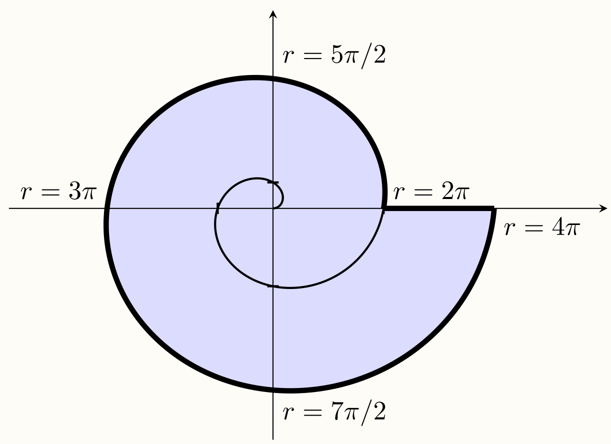
Figura 2: La Espiral de Arquímedes. La primera vuelta ($r \in [0, 2\pi]$) se ilustra con una línea punteada, y la segunda vuelta ($r \in [2\pi, 4\pi]$), con una línea sólida. Algunos valores de r están indicados para la segunda vuelta.

Solución

Para encontrar el área sombreada, se calcula el área de dos regiones, $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$, y se restan. Estas regiones se muestran en la Figura 3.



(a) Esquema de la región $\mathcal{R}_1$.



(b) Esquema de la región $\mathcal{R}_2$.

Figura 3: Las regiones consideradas.

Más precisamente, la región $\mathcal{R}_1$ es la encerrada por la espiral de Arquímedes en la primera vuelta, es decir para $\phi \in [0, 2\pi]$, es decir,

$$\mathcal{R}_1 = \{(r\cos(\phi), r\,\mathrm{sen}(\phi)) \mid \phi \in [0, 2\pi], r \in [0, \phi]\},$$

y la región $\mathcal{R}_2$ es la encerrada por la espiral de Arquímedes en la segunda vuelta, es decir, para $\phi \in [2\pi, 4\pi]$, es decir,

$$\mathcal{R}_2 = \{(r\cos(\phi), r\,\mathrm{sen}(\phi)) \mid \phi \in [2\pi, 4\pi], r \in [0, \phi]\}.$$

De esta manera, el área buscada es

$$\text{área}(\mathcal{R}_2) - \text{área}(\mathcal{R}_1)$$

(0,75 pts. por escribir el área buscada como la resta de las áreas de dos regiones)

$$= \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} \phi^2 \,\mathrm{d}\phi - \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \phi^2 \,\mathrm{d}\phi$$ **(0,75 pts. por escribir las dos áreas en términos de integrales)**

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\phi^3}{3}\right]\Bigg|_{2\pi}^{4\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{\phi^3}{3}\right]\Bigg|_{0}^{2\pi}$$ **(0,75 pto. por calcular las primitivas)**

$$= \frac{([64-8]-[8-0])\pi^3}{6} = 8\pi^3.$$ **(0,75 pto. por encontrar el área buscada)**

P2. Considere las funciones $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ y $g\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 2\sqrt{4-x}$ y $g(x) = x-1$. Sea $\mathcal{R}$ la región del primer cuadrante encerrada bajo ambas funciones, es decir:

$$\mathcal{R} = \Big\{(x,y) \ \mid \ x \in [1,4],\ 0 \le y \le \min\{f(x), g(x)\}\Big\},$$

como muestra la Figura 4.

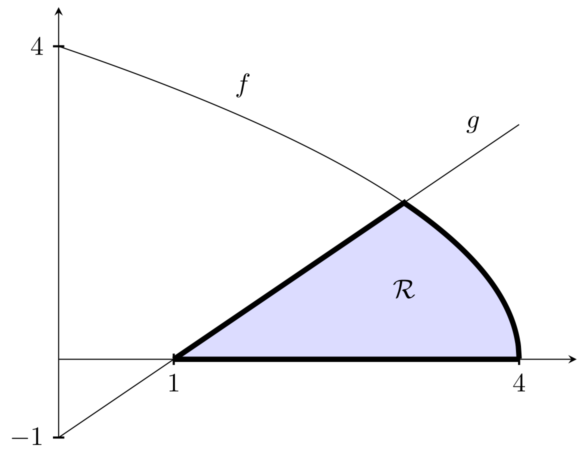


Figura 4: Esquema de la región $\mathcal{R}$.

a) **(3,0 pts.)** Calcule el área de la región $\mathcal{R}$.

Solución

Para calcular el área, se comienza encontrando el punto de intersección entre las dos curvas. Se busca de este modo $x \in [0,4]$ tal que $f(x) = g(x)$, de donde se obtiene $2\sqrt{4-x} = x-1$. Elevando al cuadrado, resulta

$$4(4-x) = (x-1)^2 \iff 16 - 4x = x^2 - 2x + 1 \iff x^2 + 2x - 15 = 0.$$

(0,5 pts. por planear las ecuaciones).

Usando la fórmula cuadrática, se obtiene que $x \in \left\{\dfrac{-2-\sqrt{64}}{2}, \dfrac{-2+\sqrt{64}}{2}\right\}$, es decir, $x \in \{-5, 3\}$. Como se busca $x \in [0,4]$, se descarta la solución negativa, quedando que $x = 3$ **(0,5 pts. por encontrar el punto de intersección)**.

Como además la intersección entre la curva g y el eje horizontal ocurre en $x = 1$, el área de la región $\mathcal{R}$ es igual a

$$\begin{aligned}
\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x + \int_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_1^3 (x-1)\,\mathrm{d}x + \int_3^4 2\sqrt{4-x}\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{(0,5 pts. por plantear las integrales)}\\
&= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]\Bigg|_1^3 + \left[-\frac{4}{3}(4-x)^{3/2}\right]\Bigg|_3^4 \mathrm{d}x\\
&\qquad \textbf{(1,0 pts. = 2} \times \textbf{0,5 pts. por encontrar las primitivas)}\\
&= \left[\left(\frac{9}{2} - 3\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] + \left[-\frac{4}{3}\cdot 0^{3/2} + \frac{4}{3}\cdot 1^{3/2}\right]\\
&= 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}. \qquad \textbf{(0,5 pts. por evaluar y encontrar el área)}
\end{aligned}$$

Alternativa

También se puede encontrar el área del primer trozo (es decir, $\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x$) observando que se trata del área de un triángulo de base y altura de largo 2, de un triángulo rectángulo isósceles de catetos de largo 2, o de la mitad de un cuadrado de lado de largo 2.

b) **(3,0 pts.)** Calcule el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje horizontal.

Solución

Por lo que se determinó en la parte anterior, el punto de intersección entre las dos curvas ocurre en $x = 3$. Por lo tanto, el volumen buscado es igual a

$$\pi \int_1^3 \big(g(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x + \pi \int_3^4 \big(f(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_1^3 (x-1)^2 \,\mathrm{d}x + \pi \int_3^4 (2\sqrt{4-x})^2 \,\mathrm{d}x$$

(1,0 pts. por planear las integrales)

$$= \pi \int_1^3 (x-1)^2 \,\mathrm{d}x + \pi \int_3^4 4(4-x) \,\mathrm{d}x$$

$$= \pi \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]\Bigg|_1^3 + \pi \left[-4 \cdot \frac{(4-x)^2}{2}\right]\Bigg|_3^4$$

(1,0 pts. = 2 × 0,5 pts. por encontrar las primitivas)

$$= \pi \left[\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] + \pi \left[-4 \cdot \frac{0^2}{2} + 4 \cdot \frac{1^2}{2}\right]$$

$$= \frac{8}{3}\pi + 2\pi = \frac{14}{3}\pi.$$ **(1,0 pts. por evaluar y encontrar el volumen)**

Alternativa

También se puede encontrar el volumen del primer trozo (es decir, $\pi \int_1^3 \big(g(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x$) observando que se trata del volumen de un cono de base de radio 2 y altura 2.

P3. Determine si las siguientes integrales impropias convergen o divergen:

a) **(3,0 pts.)**

$$\int_{0^+}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/6} \cdot (x^{3/2}+1)}$$

Solución

Sea $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{x^{1/6} \cdot (x^{3/2}+1)}.$$

Como f tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y es continua en $(0,\infty)$, la integral impropia es de tercera especie (o mixta). Por lo que debe separse en dos integrales (una de segunda especie y otra de primera especie):

$$\int_{0^+}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/6} \cdot (x^{3/2}+1)} = \int_{0^+}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/6} \cdot (x^{3/2}+1)} + \int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/6} \cdot (x^{3/2}+1)}.$$

(0,5 pts. por notar que f tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y separar la integral).

Para que la integral analizada converja, deben converger ambos sumandos. Se demostrará que esto es verdadero. **(El análisis de cada integral vale 1,25 pts.)**

Primera forma para demostrar la convergencia del primer sumando (Comparación)

Sea $g\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \frac{1}{x^{1/6}}.$$

(0,2 pts. por escribir la función que se usará para el criterio)

Como $(x^{3/2}+1) \geq 1$ para todo $x > 0$, se tiene que

$$f(x) = \frac{1}{x^{1/6} \cdot (x^{3/2}+1)} \leq \frac{1}{x^{1/6}} = g(x).$$

(0,3 pts. por mostrar que $\boldsymbol{f(x) \leq g(x)}$)

Se tiene que $\displaystyle\int_{0^+}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente porque es la integral de una función de la forma $\dfrac{1}{x^{\alpha}}$, con $0 < \alpha < 1$, en el intervalo $[0,1]$, y este caso fue resuelto en clases.

(0,25 pts. por indicar esta convergencia).

De este modo, por el criterio de comparación, como $\displaystyle\int_{0^+}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge, entonces $\displaystyle\int_{0^+}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ también lo hace.

(0,5 pts. por usar el criterio de comparación y concluir que la integral es convergente).

Segunda forma para demostrar la convergencia del primer sumando (Criterio del cociente)

Sea $g\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \frac{1}{x^{1/6}}.$$

(0,2 pts. por escribir la función que se usará para el criterio)

Se tiene que $\displaystyle\int_{0^+}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente porque es la integral de una función de la forma $\dfrac{1}{x^{\alpha}}$, con $0 < \alpha < 1$, en el intervalo $[0,1]$, y este caso fue resuelto en clases.

(0,25 pts. por indicar esta convergencia).

Se tiene que

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x^{1/6} \cdot (x^{3/2}+1)}}{\dfrac{1}{x^{1/6}}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{1/6}}{x^{1/6} \cdot (x^{3/2}+1)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{3/2}+1} = \frac{1}{0^{3/2}+1} = 1,$$

donde se usó la continuidad de $x^{3/2}$ **(0,3 pts. por calcular el límite)**.

Como $L \in (0,\infty)$, se concluye que ambas integrales, $\displaystyle\int_{0^+}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ y $\displaystyle\int_{0^+}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$, convergen, o ambas divergen. como $\displaystyle\int_{0^+}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente $\displaystyle\int_{0^+}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente **(0,5 pts. por usar el criterio del cociente y concluir que la integral es convergente)**.

Para ver la convergencia del segundo sumando, también se puede usar el criterio de comparación o el criterio del cociente.

Primera forma para demostrar la convergencia del segundo sumando (Comparación)

Sea $h\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \frac{1}{x^{3/2}}.$$

(0,2 pts. por escribir la función que se usará para el criterio)

Se tiene que $\int_1^\infty h(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente porque es la integral de una función de la forma $\frac{1}{x^\alpha}$, con $\alpha > 1$, en el intervalo $[1,\infty)$, y este caso fue resuelto en clases.

(0,25 pts. por indicar esta convergencia).

Como $x^{1/6} \geq 1$ y $x^{3/2} + 1 \geq x^{3/2}$ para todo $x \geq 1$, se tiene que

$$f(x) = \frac{1}{x^{1/6} \cdot (x^{3/2}+1)} \leq \frac{1}{x^{3/2}+1} \leq \frac{1}{x^{3/2}} = h(x).$$

(0,3 pts. por mostrar que $\boldsymbol{f(x) \leq h(x)}$)

De este modo, por el criterio de comparación, como la integral $\int_1^\infty h(x)\,\mathrm{d}x$ converge, entonces $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ también lo hace.

(0,5 pts. por usar el criterio de comparación y concluir que la integral es convergente).

Alternativa

También se puede hacer la comparación con $h(x) = \frac{1}{x^{5/3}}$, o en realidad con cualquier otra función $h(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ para $1 < \alpha \leq \frac{5}{3}$.

Segunda forma para demostrar la convergencia del segundo sumando (Criterio del cociente)

Sea $h\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \frac{1}{x^{5/3}}.$$

(0,2 pts. por escribir la función que se usará para el criterio)

Se tiene que $\int_1^\infty h(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente porque es la integral de una función de la forma $\frac{1}{x^\alpha}$, con $\alpha > 1$, en el intervalo $[1,\infty)$, y este caso fue resuelto en clases.

(0,25 pts. por indicar esta convergencia).

Se tiene que

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^{1/6}\cdot(x^{3/2}+1)}}{\frac{1}{x^{5/3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{5/3}}{x^{5/3}+x^{1/6}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^{-3/2}} = \frac{1}{1+0} = 1,$$

(0,3 pts. por calcular el límite).

Como $L \in (0,1)$, se concluye que ambas integrales, $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ y $\int_1^\infty h(x)\,\mathrm{d}x$, convergen, o ambas divergen. Como $\int_1^\infty h(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente, $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente

(0,5 pts. por usar el criterio del cociente y concluir que la integral es convergente).

Alternativa

También se puede usar el criterio del cociente con $h(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$, o en realidad con cualquier otra función $h(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ para $1 < \alpha \leq \frac{5}{3}$. En este caso el resultado del límite $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{h(x)}$ es 0, de donde se concluye que (visto en clases) $h(x)$ domina a $f(x)$. Por lo tanto, si $\int_1^\infty h(x)\,\mathrm{d}x$ converge, $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ también lo hace.

b) **(3,0 pts.)**

$$\int_0^{1^-} \frac{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Solución

Sea $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}.$$

La función f tiene una asíntota vertical en $x = 1$, por lo que la integral estudiada es una integral impropia de segunda especie.

(0,5 pts. por hacer notar que f tiene una asíntota vertical en $x = 1$)

Para $x \in [0,1)$ se tiene que

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}\cdot(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}\cdot(1+\sqrt{x})}{1-x} = \frac{\sqrt{1+x}\cdot(1+\sqrt{x})}{\sqrt{1-x}}.$$

(0,5 pts. por racionalizar y simplificar).

Para ver la convergencia de esta integral impropia, se puede usar el criterio de comparación o el criterio del cociente.

Primera forma (Comparación)

Como para todo $x \in [0,1)$, se tiene que

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}\cdot(1+\sqrt{x})}{\sqrt{1-x}} \leq \frac{\sqrt{1+1}\cdot(1+\sqrt{1})}{\sqrt{1-x}} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}.$$

(0,7 pts. por mostrar la desigualdad)

Sea $g\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}.$$

Se tiene que $\displaystyle\int_0^{1^-} g(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente porque es la integral de una función de la forma $\dfrac{C}{(1-x)^\alpha}$, con $\alpha = 1/2 < 1$ y $c \in \mathbb{R}$ en el intervalo $[0,1)$, y este caso fue resuelto en clases.

(0,3 pts. por indicar esta convergencia).

De este modo, por el criterio de comparación, ya que la integral impropia de segunda especie $\displaystyle\int_0^{1^-} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge, entonces $\displaystyle\int_0^{1^-} f(x)\,\mathrm{d}x$ también lo hace.

(1,0 pto. por usar el criterio de comparación y concluir que la integral es convergente).

Alternativa

También se puede comparar con cualquier función $g(x) = \dfrac{c}{(1-x)^\alpha}$ para $c \geq 2\sqrt{2}$ y $1/2 \leq \alpha < 1$.

Segunda forma (Criterio del cociente)

Sea $g\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

(0,4 pts. por escribir la función que se usará para el criterio)

Se tiene que $\displaystyle\int_0^{1^-} g(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente porque es la integral de una función de la forma $\dfrac{1}{(1-x)^\alpha}$, con $\alpha = 1/2 < 1$ en el intervalo $[0,1)$, y este caso fue resuelto en clases.

(0,3 pts. por indicar esta convergencia).

Se tiene que

$$L = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\dfrac{\sqrt{1+x}\cdot(1+\sqrt{x})}{\sqrt{1-x}}}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{1+x}\cdot(1+\sqrt{x}) = \sqrt{1+1}\cdot(1+\sqrt{1}) = 2\sqrt{2},$$

donde se usó la continuidad de $\sqrt{1+x}\cdot(1+\sqrt{x})$ **(0,6 pts. por calcular el límite)**.

Como $L \in (0,\infty)$, se concluye que ambas integrales, $\displaystyle\int_0^{1^-} f(x)\,\mathrm{d}x$ y $\displaystyle\int_0^{1^-} g(x)\,\mathrm{d}x$, tiene el mismo comportamiento. Como $\displaystyle\int_0^{1^-} g(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente, $\displaystyle\int_0^{1^-} f(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente

(0,7 pto. por usar el criterio del cociente y concluir que la integral es convergente).

Formulario		
	Área de la región entre la curva definida por f y el eje horizontal ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable)	$\displaystyle\int_a^b \lvert f(x)\rvert dx$
	Volumen de un sólido de área transversal A ($A\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable)	$\displaystyle\int_a^b A(x)dx$
	Volumen del sólido de revolución obtenido rotando la región entre la curva definida por f y el eje horizontal, en torno al eje horizontal ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ no negativa e integrable)	$\displaystyle\pi\int_a^b \big(f(x)\big)^2 dx$
	Volumen del sólido de revolución obtenido rotando la región entre la curva definida por f y el eje horizontal, en torno al eje vertical ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable, con $a \geq 0$)	$\displaystyle 2\pi\int_a^b x f(x)dx$
	Longitud del arco de curva definido por f ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ de clase C^1)	$\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}dx$
	Superficie del manto del sólido de revolución obtenido rotando la región entre la curva definida por f y el eje horizontal, en torno al eje horizontal ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ no negativa y de clase C^1)	$\displaystyle 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}dx$
	Área de la región encerrada por la curva definida en coordenadas polares por $r = f(\phi)$ ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ no negativa, integrable, con $b-a \leq 2\pi$)	$\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b \big(f(\phi)\big)^2 d\phi$