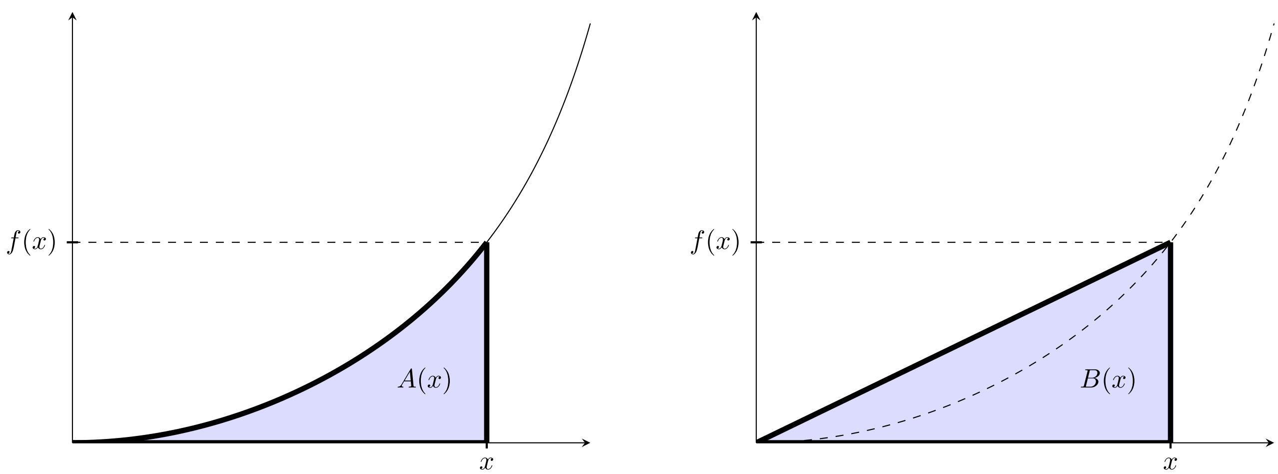
Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1002: Cálculo Diferencial e Integral. 2023-2

Control 3

P1. a) **(3,0 pts.)** Considere la función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \tan(t^2)$. Para $x \in [0,1]$, sea $A(x)$ el área bajo la curva de f en el intervalo $[0,x]$, como muestra la Figura 1a. Sea además $B(x)$ el área del triángulo de vértices $(0,0)$, $(x,0)$ y $(x, f(x))$, como muestra la Figura 1b.

Calcule el límite

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{A(x)}{B(x)}.$$



(a) El área $A(x)$.   (b) El área $B(x)$.

Figura 1: Esquema de las áreas consideradas.

b) **(3,0 pts.)** Considere la *espiral de Arquímedes* definida en coordenadas polares por la ecuación $r = \phi$, para $\phi \in [0, 4\pi]$, (dos vueltas completas).

Calcule el área de la región encerrada entre la primera y segunda vuelta de esta curva. Es decir, el área de la región sombreada en la Figura 2.

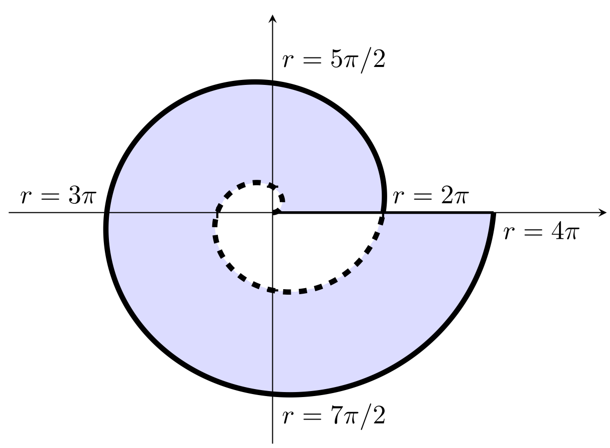


Figura 2: La Espiral de Arquímedes. La primera vuelta ($r \in [0, 2\pi]$) se ilustra con una línea punteada, y la segunda vuelta ($r \in [2\pi, 4\pi]$), con una línea sólida. Algunos valores de r están indicados para la segunda vuelta.

P2. Considere las funciones $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ y $g\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 2\sqrt{4-x}$ y $g(x) = x - 1$. Sea $\mathcal{R}$ la región del primer cuadrante encerrada bajo ambas funciones, es decir:

$$\mathcal{R} = \Big\{(x,y) \ \mid \ x \in [1,4],\ 0 \le y \le \text{mín}\{f(x), g(x)\}\Big\},$$

como muestra la Figura 3.

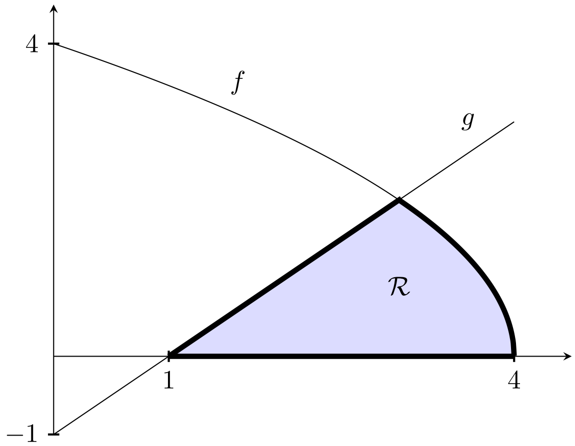


Figura 3: Esquema de la región $\mathcal{R}$.

a) **(3,0 pts.)** Calcule el área de la región $\mathcal{R}$.

b) **(3,0 pts.)** Calcule el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje horizontal.

P3. Determine si las siguientes integrales impropias convergen o divergen:

a) **(3,0 pts.)**

$$\int_{0^+}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/6}\cdot(x^{3/2}+1)}$$

b) **(3,0 pts.)**

$$\int_0^{1^-} \frac{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Formulario	Área de la región entre la curva definida por f y el eje horizontal ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable)	$\displaystyle\int_a^b \lvert f(x)\rvert dx$
	Volumen de un sólido de área transversal A ($A\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable)	$\displaystyle\int_a^b A(x)dx$
	Volumen del sólido de revolución obtenido rotando la región entre la curva definida por f y el eje horizontal, en torno al eje horizontal ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ no negativa e integrable)	$\displaystyle\pi\int_a^b \big(f(x)\big)^2 dx$
	Volumen del sólido de revolución obtenido rotando la región entre la curva definida por f y el eje horizontal, en torno al eje vertical ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable, con $a \ge 0$)	$\displaystyle 2\pi\int_a^b x f(x)dx$
	Longitud del arco de curva definido por f ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ de clase C^1)	$\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}dx$
	Superficie del manto del sólido de revolución obtenido rotando la región entre la curva definida por f y el eje horizontal, en torno al eje horizontal ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ no negativa y de clase C^1)	$\displaystyle 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}dx$
	Área de la región encerrada por la curva definida en coordenadas polares por $r = f(\phi)$ ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ no negativa, integrable, con $b - a \le 2\pi$)	$\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b \big(f(\phi)\big)^2 d\phi$

Si usa un teorema, no olvide verificar explícitamente cada una de sus hipótesis.

Duración: 3h.