Control 3 - recuperativo

P1. Considere las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es nula y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

a) (2.0 pts) Use la definición de convergencia para demostrar que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n = 0$.

Solución: Como $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, existe $M > 0$ tal que $|b_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. **(0.5 pts)**
Luego, para $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\forall n \geq N) \quad |a_n| < \frac{\varepsilon}{M}. \qquad \textbf{(0.8 pts)}$$

Por ende,

$$(\forall n \geq N) \quad |a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| < \left(\frac{\varepsilon}{M}\right) M = \varepsilon \qquad \textbf{(0.4 pts)}$$

probando que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n = 0$. **(0.3 pts)**

b) (2.0 pts) Demuestre que existen $m > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $1 - a_n > m$ para $n \geq N$.

Solución: En efecto, para $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\forall n \geq N) \quad |a_n| < \varepsilon. \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

Tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$, se tiene que para todo $n \geq N$

$$-\frac{1}{2} < a_n < \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} < 1 - a_n < 1 + \frac{1}{2}. \qquad \textbf{(1.0 pto)}$$

En particular, basta elegir $m = \frac{1}{2}$ para concluir lo pedido. **(0.5 pts)**

c) (2.0 pts) Usando las partes *a*) y *b*), concluya que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{1 - a_n} = 0$.

Solución: Como $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es nula, entonces es acotada, al igual que $\{1 - a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. **(0.6 pts)**
Luego, aplicando la parte *b*),

$$\left\{\frac{1}{1 - a_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

es una sucesión acotada y bien definida (por ser positiva) para $n \geq N$. **(0.8 pts)**

Aplicando la parte a), se concluye que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1-a_n} = \lim_{n\to+\infty} a_n \left(\frac{1}{1-a_n}\right) = 0. \qquad \textbf{(0.6 pts)}$$

P2. a) Considere una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_1 = 1$ y $(\forall n \in \mathbb{N})$ $a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{4+a_n^2}{2}}$.

i) (1.0 pto) Demuestre que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es no negativa y creciente.

Solución: Mediante Inducción, se demostrará que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 \leq a_n \leq a_{n+1}$. **(0.3 pts)**
Este resultado se comprobará por Inducción. El caso en que $n = 1$ es trivial, ya que $a_1 > 0$ y

$$a_2 = \sqrt{\frac{4+a_1^2}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} > 1 = a_1. \qquad \textbf{(0.4 pts)}$$

Si $a_{n+1} > a_n > 0$, aplicando la monotonía de la función raíz cuadrada y de la función x^2 para números positivos, se cumple que

$$a_{n+2} = \sqrt{\frac{4+a_{n+1}^2}{2}} \geq \sqrt{\frac{4+a_n^2}{2}} = a_{n+1} > 0 \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

probando el resultado.

ii) (1.0 pto) Pruebe que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $a_n \leq M$ para toda constante $M > 2$.

Solución: Nuevamente se procede por Inducción. En efecto, $a_1 = 1 < 2 < M$. **(0.4 pts)**
Luego, si se asume que $a_n \leq 2$, entonces

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{4+a_n^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{4+M^2}{2}} < \sqrt{\frac{M^2+M^2}{2}} = M$$

probando lo pedido. **(0.6 pts)**

iii) (1.0 pto) Concluya que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y calcule su límite.

Solución: Dado que la sucesión es acotada superiormente y creciente, entonces la sucesión posee límite gracias al Teorema de Sucesiones Monótonas. **(0.3 pts)**
Como $L = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1}$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{4+a_n^2}{2}} \\ L &= \sqrt{\frac{4+L^2}{2}} \\ 2L^2 &= 4+L^2 \\ L^2 &= 4 \end{aligned} \qquad \textbf{(0.4 pts)}$$

existiendo dos soluciones ($L = 2$ y $L = 2$). Como la sucesión es estrictamente positiva, entonces $L = 2$. **(0.3 pts)**

b) Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

i) (1.5 pts) Determine el dominio y recorrido de f.

Solución: Se tiene que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Dom}(f) &= \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) = \ln\left(1+e^{-x}\right) \in \mathbb{R}\right\} && \textbf{(0.2 pts)}\\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, 1+e^{-x} > 0\right\} && \textbf{(0.2 pts)}\\
&= \mathbb{R}. && \textbf{(0.3 pts)}
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Rec}(f) &= \{y \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in \mathbb{R})\ \ y = f(x)\} && \textbf{(0.2 pts)}\\
&= \left\{y \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in \mathbb{R})\ \ y = \ln\left(1+e^{-x}\right)\right\} &&\\
&= \left\{y \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in \mathbb{R})\ \ e^{y} = 1+e^{-x}\right\} && \textbf{(0.2 pts)}\\
&= \left\{y \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in \mathbb{R})\ \ e^{-x} = e^{y}-1\right\} &&\\
&= \{y \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in \mathbb{R})\ \ x = -\ln(e^{y}-1)\} && (1)\\
&= \{y > 0 \mid (\exists x \in \mathbb{R})\ \ x = -\ln(e^{y}-1)\} && \textbf{(0.2 pts)}\\
&= (0, +\infty). && \textbf{(0.2 pts)}
\end{aligned}$$

ii) (1.5 pts) Demuestre que f es estrictamente decreciente. ¿f posee función inversa?

Solución: Sean $a, b \in \operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$, con $a < b$. Entonces, $e^{-a} > e^{-b}$, ya que la función exponencial es estrictamente creciente **(0.3 pts)**. Luego, como la función logaritmo natural es estrictamente creciente,

$$\begin{aligned}
1+e^{-a} &> 1+e^{-b} && \textbf{(0.2 pts)}\\
\ln\left(1+e^{-a}\right) &> \ln\left(1+e^{-b}\right) && \textbf{(0.2 pts)}\\
f(a) &> f(b) && \textbf{(0.2 pts)}
\end{aligned}$$

probando que la función es estrictamente decreciente.

Luego, la función

1°) es inyectiva al ser estrictamente decreciente, **(0.2 pts)**
2°) no es sobreyectiva de acuerdo a lo concluido en la parte anterior. **(0.2 pts)**

De 1°) y 2°), se concluye que f no es biyectiva y, por ende, no posee inversa. **(0.2 pts)**

P3. Calcule cuatro de los siguientes límites:

a) (1.5 pts) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$

b) (1.5 pts) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$

c) (1.5 pts) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{n}+2}{5}\right)^{n}$

d) (1.5 pts) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1+3e^{2n}}{4e^{n}-5e^{2n}}$

e) (1.5 pts) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^3-7n^2+1}{3+5n-2n^2-4n^3}$

f) (1.5 pts) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^2}$

Solución:

a) Notamos que al multiplicar y dividir la expresión, por el radical conjugado se obtiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} && \textbf{(0.3 pts)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}\right)^2-\left(\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)^2}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} && \textbf{(0.2 pts)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+\sqrt{n})-(n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} && \textbf{(0.2 pts)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} && \textbf{(0.2 pts)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)} && \textbf{(0.2 pts)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}. && \textbf{(0.2 pts)}
\end{aligned}$$

Usando álgebra de límites, como el numerador tiende a 2 y el denominador tiende a $2\neq 0$, se deduce que

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}=1. \qquad \textbf{(0.2 pts)}$$

b) Reescribiendo la raíz como $\sqrt[n]{2}=\exp\left(\frac{1}{n}\ln 2\right)$, se cumple que

$$\begin{aligned}
n\left(\sqrt[n]{2}-1\right) &= n\left(\exp\left(\frac{1}{n}\ln 2\right)-1\right) && \textbf{(0.5 pts)}\\
&= (\ln 2)\left(\frac{\exp\left(\frac{1}{n}\ln 2\right)-1}{\frac{1}{n}\ln 2}\right),
\end{aligned}$$

donde

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\exp\left(\frac{1}{n}\ln 2\right)-1}{\frac{1}{n}\ln 2}=\exp\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln 2\right)=1.$$

(0.5 pts)

Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{2}-1\right) &= (\ln 2)\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\exp\left(\frac{1}{n}\ln 2\right)-1}{\frac{1}{n}\ln 2}\right) && \textbf{(0.3 pts)}\\
&= \ln 2. && \textbf{(0.2 pts)}
\end{aligned}$$

c) En primer lugar, usando álgebra de límites, se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n}+2}{5} = \frac{1+2}{5} = \frac{3}{5} \in (-1,1)\,. \qquad \textbf{(0.7 pts)}$$

Entonces, se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{n}+2}{5}\right)^n = 0. \qquad \textbf{(0.8 pts)}$$

d) Diviendo por e^{2n} el numerador y denominador, y usando álgebra de límites, tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{1+3e^{2n}}{4e^n-5e^{2n}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+3e^{2n}}{4e^n-5e^{2n}} \cdot \frac{\frac{1}{e^{2n}}}{\frac{1}{e^{2n}}} && \textbf{(0.4 pts)}\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{e^{2n}}+3}{\frac{4}{e^n}-5}\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{e^2}\right)^n+3}{4\left(\frac{1}{e}\right)^n-5} && \textbf{(0.3 pts)}\\
&= -\frac{3}{5}. && \textbf{(0.2 pts)}
\end{aligned}$$

Notando que:

1°) en el denominador

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0 \text{ pues } \left|\frac{1}{e}\right| < 1, \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

2°) en el numerador

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{e^2}\right)^n = 0 \text{ pues } \left|\frac{1}{e^2}\right| < 1. \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

e) Al dividir por n^3 el numerador y denominador, y usando álgebra de límites, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^3-7n^2+1}{3+5n-2n^2-4n^3} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{3-\frac{7}{n}+\frac{1}{n^3}}{\frac{3}{n^3}+\frac{5}{n^2}-\frac{2}{n}-4} && \textbf{(0.5 pts)}\\
&= \frac{3-0+0}{0+0-0-4} && \textbf{(0.5 pts)}\\
&= -\frac{3}{4} && \textbf{(0.5 pts)}
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \text{ para } k \in \{1,2,3\}\,.$$

f) Primero, notar que

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^2} &= \exp\left(n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{n}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{\left(\frac{1}{n^3}\right)}\right) && \textbf{(0.5 pts)}\end{aligned}$$

donde

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{\left(\frac{1}{n^3}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)-\ln(1)}{\left(1+\frac{1}{n^3}-1\right)} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} = 1,$$

por resultado visto en clases. **(0.4 pts)**

Por ende,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^2} &= \exp\left(\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{\left(1+\frac{1}{n^3}-1\right)}\right)\right) && \textbf{(0.2 pts)}\\ &= \exp\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{\left(1+\frac{1}{n^3}-1\right)}\right) && \textbf{(0.2 pts)}\\ &= \exp(0)\\ &= 1. && \textbf{(0.2 pts)}\end{aligned}$$

Duración: 3h.