Control 1

P1. *a*) (3.0 ptos) Sean a, b y c números reales positivos. Usando los axiomas y propiedades de cuerpo y de orden de los números reales pruebe que

$$8 \cdot a \cdot b \cdot c \leq (a+b) \cdot (a+c) \cdot (b+c)$$

b) (3.0 ptos) Resuelva la inecuación $|x^2 - 2x| + x|x+3| \geq 3$.

P2. *a*) (3.0 ptos) Considere dos circunferencias, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. La primera tiene su centro en el origen y un radio de 1, mientras que la segunda tiene su centro en $(2,1)$ y un radio de r. Demuestre que si $1 + r = \sqrt{5}$, entonces $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ tienen exactamente un punto de intersección.

b) (3.0 ptos) Un punto $P = (x, y)$ se mueve de modo que las pendientes de las rectas que lo unen a los puntos $A = (a, 0)$ y $A' = (-a, 0)$ tienen un producto constante negativo. Caracterice el lugar geométrico del punto P.

P3. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{1 - \dfrac{3}{x+2}}$.

a) (2.0 ptos) Determine el dominio y los ceros de f.

b) (1.0 pto) Analice la paridad de esta función.

c) (1.0 pto) Determine los intervalos donde esta función es creciente o decreciente, según corresponda.

d) (1.0 pto) Calcule $f([1,2])$.

e) (1.0 pto) Dibuje un bosquejo de la gráfica de f que represente sus respuestas de las partes anteriores.

Duración: 3h.