Pauta de corrección Control 2

P1. Calcule las siguientes primitivas:

a) **(2,0 pts.)** $\displaystyle\int e^x \cdot \frac{e^x-1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$

Solución

Primera forma (con el cambio de variable $u = e^x$)

Se usa el cambio de variable

$$u = e^x, \qquad \mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$$

(0,5 pts. por enunciar el cambio de variable)

Así, se obtiene

$$\int e^x \cdot \frac{e^x-1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u-1}{u+1}\,\mathrm{d}u$$

(0,5 pts. por hacer el cambio de variable)

$$= \int \frac{u+1-2}{u+1}\,\mathrm{d}u = \int \left(1 - \frac{2}{u+1}\right)\mathrm{d}u$$
$$= u - 2\ln(u+1) + C = e^x - 2\ln(e^x+1) + C.$$

(1,0 pto. por calcular la primitiva)

Segunda forma (con el cambio de variable $u = e^x + 1$)

Se usa el cambio de variable

$$u = e^x + 1, \qquad \mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$$

(0,5 pts. por enunciar el cambio de variable)

Así, se oobtiene

$$\int e^x \cdot \frac{e^x-1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u-2}{u}\,\mathrm{d}u$$

(0,5 pts. por hacer el cambio de variable)

$$= \int \left(1 - \frac{2}{u}\right)\mathrm{d}u = u - 2\ln(u) + C = e^x + 1 - 2\ln(e^x+1) + C.$$

(1,0 pto. por calcular la primitiva)

b) **(2,0 pts.)** $\displaystyle\int x^2\big(\ln(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$

Solución

Se usa integración por partes con

$$f = \big(\ln(x)\big)^2 \qquad f' = \frac{2\ln(x)}{x}$$
$$g' = x^2 \qquad g = \frac{x^3}{3}$$

(0,4 pts. por enunciar la integración por partes)

para obtener que

$$\int x^2\big(\ln(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\big(\ln(x)\big)^2 - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{2\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\big(\ln(x)\big)^2 - \frac{2}{3}\int x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

(0,5 pts. por hacer la integración por partes)

Para calcular la primitiva $\int x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x$, se usa nuevamente integración por partes con

$$\begin{aligned} f &= \ln(x) & f' &= \frac{1}{x} \\ g' &= x^2 & g &= \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

(0,4 pts. por enunciar la integración por partes)

para obtener que

$$\int x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{3}\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C.$$

(0,5 pts. por hacer la integración por partes)

Reemplazando en (1), se obtiene

$$\int x^2\big(\ln(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\big(\ln(x)\big)^2 - \frac{2}{3}\int x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\big(\ln(x)\big)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9}\right) + C.$$

(0,2 pts. por reemplazar)

Lo que también se puede simplificar para obtener

$$\int x^2\big(\ln(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{27}\big(9\big(\ln(x)\big)^2 - 6\ln(x) + 2\big) + C.$$

c) **(2,0 pts.)** $\displaystyle\int \frac{1}{(x-3)(x+1)}\,\mathrm{d}x$

Solución

Se comienza por separar la expresión $\dfrac{1}{(x-3)(x+1)}$ en fracciones parciales. Para ello, se buscan constantes $A, B \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{1}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

(0,3 pts. por enunciar las fracciones parciales)

Usando las identidades

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-3)}{(x-3)(x+1)} = \frac{(A+B)x + (A-3B)}{(x-3)(x+1)}$$

resulta la igualdad de polinomios

$$(A+B)x + (A-3B) = 1$$

(0,2 pts. por obtener la igualdad de polinomios)

que implica que

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ A - 3B &= 1. \end{aligned}$$

(0,2 pts. por obtener las ecuaciones)

Este sistema de ecuaciones se puede resolver por varios métodos. Por ejemplo, sumando tres veces la primera ecuación con la segunda resulta en $4A = 1$, de donde queda que $A = \frac{1}{4}$ y que $B = -\frac{1}{4}$.

(0,3 pts. por resolver las ecuaciones)

Alternativa

También es posible escribir la igualdad de polinomios como

$$A(x+1) + B(x-3) = 1$$

y evaluar en $x = -1$ y $x = 3$ para obtener las ecuaciones $-4B = 1$ y $4A = 1$, respectivamente, las que inmediatamente muestran que $A = \frac{1}{4}$ y que $B = -\frac{1}{4}$.

Por lo tanto,

$$\int \frac{1}{(x-3)(x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln|x-3| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + C.$$

(0,5 pts. por resolver cada primitiva (1,0 pto. en total))

P2. Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$. Para $n \in \mathbb{N}$, considere una partición equispaciada $P_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[0,1]$, esto es, $x_i = \frac{i}{n}$ para $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Sean $f_-, f_+\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ las funciones escalonadas asociadas a la partición P_n definidas por

$$f_-(x) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{y} \quad f_+(x) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $x \in (x_{i-1}, x_i)$, e iguales a $f(x_i)$ en cada punto x_i de la partición P_n.

a) **(3,0 pts.)** Pruebe que

$$\int_0^1 f_- = (e-1)\cdot\left(\frac{1/n}{e^{1/n}-1}\right) \quad \text{y} \quad \int_0^1 f_+ = (e-1)\cdot e^{1/n}\cdot\left(\frac{1/n}{e^{1/n}-1}\right).$$

Solución

Se comienza fijando $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que la función f es creciente. Así, el ínfimo de f en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$ se alcanza en $f(x_{i-1})$, y el supremo de f en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$ se alcanza en $f(x_{i-1})$. Luego, se obtiene que

$$f_-(x) = f(x_{i-1}) = e^{(i-1)/n} \quad \text{y} \quad f_+(x) = f(x_i) = e^{i/n}$$

para cada $x \in (x_{i-1}, x_i)$ y cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(0,8 pts. por encontrar los valores de f_- y de f_+)

Por otro lado, como la partición P_n es equiespaciada, se tiene que $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(0,6 pts. por encontrar Δx_i)

Por lo tanto,

$$\int_0^1 f_- = \sum_{i=1}^{n} e^{(i-1)/n}\Delta x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{(i-1)/n} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{i/n} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(e^{1/n})^i$$

(0,4 pts. por expresar $\int_0^1 f_-$ como la sumatoria)

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{(e^{1/n})^{n-1+1}-1}{e^{1/n}-1}\right) = (e-1)\cdot\left(\frac{1/n}{e^{1/n}-1}\right).$$

(0,4 pts. por calcular la sumatoria y determinar $\int_0^1 f_-$)

Similarmente,

$$\int_0^1 f_+ = \sum_{i=1}^{n} e^{i/n}\Delta x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{i/n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(e^{1/n})^i$$

(0,4 pts. por expresar $\int_0^1 f_+$ como la sumatoria)

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{(e^{1/n})^{n+1} - e^{1/n}}{e^{1/n} - 1}\right) = (e-1)\cdot e^{1/n}\cdot\left(\frac{1/n}{e^{1/n}-1}\right).$$

(0,4 pts. por calcular la sumatoria y determinar $\int_0^1 f_+$)

Alternativa

También se puede usar que

$$\sum_{i=1}^{n} e^{(i-1)/n} = \sum_{i=1}^{n} e^{i/n}\cdot e^{-1/n} = e^{-1/n}\sum_{i=1}^{n} e^{i/n}$$

para calcular $\int_0^1 f_-$ de otra manera, o para obtener que

$$\int_0^1 f_+ = e^{1/n}\int_0^1 f_-$$

y evitar repetir cálculos.

<u>*Indicación:*</u> *Recuerde la suma geométrica:* $\sum_{j=\ell}^{m} r^j = \frac{r^{m+1}-r^{\ell}}{r-1}$ *para todo* $\ell, m \in \mathbb{N}$ *con* $\ell \leq m$ *y* $r \neq 1$.

b) **(3,0 pts.)** Justifique que f es Riemann integrable en $[0,1]$ y pruebe que $f_- \in \mathcal{E}_-(f)$ y $f_+ \in \mathcal{E}_+(f)$. Use los resultados previos para calcular la integral $\int_0^1 f$.

Solución

La función f es Riemann integrable en $[0,1]$ por ser continua.

(0,5 pts. por justificar que f es Riemann integrable)

Alternativa

También se puede decir que f es Riemann integrable en $[0,1]$ por ser monótona, o concluirlo a partir de (3) usando la definición de integral de Riemann o la condición de Riemann.

Se tiene que

$$f_-(x) \leq f(x) \leq f_+(x) \quad \text{para todo } x \in [0,1] \tag{2}$$

ya que f_- y f_+ toman los menores y mayores valores, respectivamente, de f en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$. Así, $f_- \in \mathcal{E}_-(f)$ y $f_+ \in \mathcal{E}_+(f)$.

(0,5 pts. por mostrar que $f_- \in \mathcal{E}_-(f)$ y $f_+ \in \mathcal{E}_+(f)$)

Alternativa

También se puede argumentar que f_- y f_+ son funciones escalonadas "conocidas" (porque sus integrales producen la suma inferior y superior de f, respectivamente), de donde automáticamente $f_- \in \mathcal{E}_-(f)$ y $f_+ \in \mathcal{E}_+(f)$.

Por definición de la integral de Riemann, se concluye entonces que

$$\int_0^1 f_- \leq \int_0^1 f \leq \int_0^1 f_+. \tag{3}$$

(0,5 pts. por acotar la integral de f por la integral de f_- y la integral de f_+)

Alternativa

Luego de justificar (2), también se puede usar la monotonía de la integral para obtener (3).

Ahora, la parte a) junto a (3) muestran que

$$(e-1)\cdot\left(\frac{1/n}{e^{1/n}-1}\right) \leq \int_0^1 f \leq (e-1)\cdot e^{1/n}\cdot\left(\frac{1/n}{e^{1/n}-1}\right). \tag{4}$$

(0,5 pts. por usar la parte anterior)

Finalmente, se observa que, del límite conocido

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{e^h - 1} = 1,$$

se tiene que, para cualquier sucesión (a_n) con $a_n \to 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{e^{a_n} - 1} = 1.$$

En particular, esto es válido para $a_n = \frac{1}{n}$. Así,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{e^{1/n} - 1} = 1.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} (e-1)\cdot\left(\frac{1/n}{e^{1/n}-1}\right) = e-1 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} (e-1)\cdot e^{1/n}\cdot\left(\frac{1/n}{e^{1/n}-1}\right) = (e-1)\cdot e^0 \cdot 1 = e-1.$$

(0,5 pts. por calcular los límites)

Junto a (4), resulta que

$$\int_0^1 f = e - 1.$$

(0,5 pts. por obtener la integral)

Alternativa

También se puede usar la regla de l'Hôpital para calcular el límite $\lim_{h\to 0} \frac{h}{e^h - 1}$.

Alternativa

También se puede calcular la integral tomando límite en solo una de las expresiones $(e-1)\cdot\left(\frac{1/n}{e^{1/n}-1}\right)$ o $(e-1)\cdot e^{1/n}\cdot\left(\frac{1/n}{e^{1/n}-1}\right)$, y argumentando que se tratan de una suma de Riemann (para la función continua f) sobre la partición P_n que cumple $|P_n| = \frac{1}{n} \to 0$.

P3. Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[0,1]$. Sean además

$$M = \sup\{f(x) : x \in [0,1]\} \quad \text{y} \quad m = \inf\{f(x) : x \in [0,1]\}.$$

a) **(3,0 pts.)** Demuestre que $m \le \int_0^1 f \le M$.

Solución

Sean $f_-, f_+\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ las funciones constantes dadas por $f_-(x) = m$ y $f_+(x) = M$. Se tiene que f_- y f_+ son funciones escalonadas (asociadas a la partición $P = \{0,1\}$).

(0,5 pts. por justificar que f_- y f_+ son escalonadas)

Además, estas funciones cumplen que

$$f_-(x) \le f(x) \le f_+(x) \quad \text{para todo } x \in [0,1], \tag{5}$$

de donde $f_- \in \mathcal{E}_-(f)$ y $f_+ \in \mathcal{E}_+(f)$.

(0,5 pts. por obtener que $f_- \in \mathcal{E}_-(f)$ y $f_+ \in \mathcal{E}_+(f)$)

Luego, por definición de la integral de Riemann,

$$\int_0^1 f_- \le \int_0^1 f \le \int_0^1 f_+. \tag{6}$$

(1,0 pts. por acotar la integral de f por la integral de f_- y la integral de f_+)

Alternativa

También se puede usar la monotonía de la integral para deducir (6) a partir de (5).

Alternativa

En lugar de escribir (5) se puede escribir

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \forall x \in [a, b]$$

y de aquí, por monotonía, deducir que

$$\int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M$$

que es equivalente a (6).

Por otro lado, por definición de la integral de funciones escalonadas,

$$\int_0^1 f_- = m \cdot (1-0) = m \quad \text{ y } \quad \int_0^1 f_+ = M \cdot (1-0) = M. \tag{7}$$

(1,0 pts. por calcular $\int_0^1 f_-$ y $\int_0^1 f_+$)

La desigualdad pedida es consecuencia directa de (7) y (6).

b) **(3,0 pts.)** Demuestre que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = \int_0^1 f$.

Solución

Como f es una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado, alcanza su mínimo y su máximo. Por lo tanto, existen $x_1, x_2 \in [0, 1]$ tales que $f(x_1) = m$ y $f(x_2) = M$.
(1,0 pto. por usar que toda función continua definida en un intervalo cerrado y acotado alcanza su máximo)
Por la parte anterior, se tiene que

$$f(x_1) = m \leq \int_0^1 f \leq M = f(x_2).$$

(1,0 pto. por acotar $\int_0^1 f$ por $f(x_1)$ y $f(x_2)$)

Así, como f es continua, del teorema de los valores intermedios, existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = \int_0^1 f$.

(1,0 pto. por usar el teorema de los valores intermedios para obtener el resultado)

Alternativa

También se puede definir la función $g \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - \int_0^1 f$, justificar que es continua y mostrar que existen $x_1, x_2 \in [0, 1]$ con $g(x_1) \leq 0$ y $g(x_2) \geq 0$ (o con $g(x_1) \cdot g(x_2) \leq 0$).