# Control 2

**P1.** Calcule las siguientes primitivas:

a) **(2,0 pts.)** $\displaystyle\int e^x \cdot \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,\mathrm{d}x$

b) **(2,0 pts.)** $\displaystyle\int x^2\big(\ln(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$

c) **(2,0 pts.)** $\displaystyle\int \frac{1}{(x-3)(x+1)}\,\mathrm{d}x$

**P2.** Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$. Para $n \in \mathbb{N}$, considere una partición equispaciada $P_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[0,1]$, esto es, $x_i = \frac{i}{n}$ para $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Sean $f_-, f_+\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ las funciones escalonadas asociadas a la partición $P_n$ definidas por

$$f_-(x) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{y} \quad f_+(x) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $x \in (x_{i-1}, x_i)$, e iguales a $f(x_i)$ en cada punto $x_i$ de la partición $P_n$.

a) **(3,0 pts.)** Pruebe que

$$\int_0^1 f_- = (e-1)\cdot\left(\frac{1/n}{e^{1/n}-1}\right) \quad \text{y} \quad \int_0^1 f_+ = (e-1)\cdot e^{1/n}\cdot\left(\frac{1/n}{e^{1/n}-1}\right).$$

<u>*Indicación:*</u> *Recuerde la suma geométrica:* $\displaystyle\sum_{j=\ell}^{m} r^j = \frac{r^{m+1} - r^\ell}{r-1}$ *para todo* $\ell, m \in \mathbb{N}$ *con* $\ell \leq m$ *y* $r \neq 1$.

b) **(3,0 pts.)** Justifique que $f$ es Riemann integrable en $[0,1]$ y pruebe que $f_- \in \mathcal{E}_-(f)$ y $f_+ \in \mathcal{E}_+(f)$. Use los resultados previos para calcular la integral $\displaystyle\int_0^1 f$.

**P3.** Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[0,1]$. Sean además

$$M = \sup\{f(x) : x \in [0,1]\} \quad \text{y} \quad m = \inf\{f(x) : x \in [0,1]\}.$$

a) **(3,0 pts.)** Demuestre que $\displaystyle m \leq \int_0^1 f \leq M$.

b) **(3,0 pts.)** Demuestre que existe $c \in [0,1]$ tal que $\displaystyle f(c) = \int_0^1 f$.

**Duración:** 3h.