Control 1

P1. *a)* (3.0 ptos) Sean a, b y c números reales positivos. Usando los axiomas y propiedades de cuerpo y de orden de los números reales pruebe que

$$8 \cdot a \cdot b \cdot c \leq (a+b) \cdot (a+c) \cdot (b+c)$$

Solución: Al expandir el lado derecho de la desigualdad tenemos:

$$\begin{aligned}
(a+b) \cdot (a+c) \cdot (b+c) &= ((a+b) \cdot (a+c)) \cdot (b+c) && \text{(Asoc. $\cdot$)} \\
&= (a \cdot a + a \cdot c + b \cdot a + b \cdot c) \cdot (b+c) && \text{(Dist. $\cdot$)} \\
&= a \cdot a \cdot (b+c) + a \cdot c \cdot (b+c) + b \cdot a \cdot (b+c) + b \cdot c \cdot (b+c) && \text{(Dist. $\cdot$)} \\
&= a^2 \cdot b + a^2 \cdot c + c^2 \cdot a + b^2 \cdot a + b^2 \cdot a + b^2 \cdot c + c^2 \cdot b + 2 \cdot a \cdot b \cdot c
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado

1° la definición de a^2, b^2, c^2 y 2.
2° (Conm. $\cdot$), (Conm $+$), (Neutro $\cdot$) y (Dist. $\cdot$).

Ahora, usando (Conm. $+$) y (Dist. $\cdot$) vamos a obtener

$$(a+b) \cdot (a+c) \cdot (b+c) = (b^2 + c^2) \cdot a + (a^2 + c^2) \cdot b + (b^2 + a^2) \cdot c + 2 \cdot a \cdot b \cdot c \tag{1}$$

(1.5 pts)

Como

$$\begin{aligned}
b^2 + c^2 &\geq 2 \cdot b \cdot c \\
a^2 + c^2 &\geq 2 \cdot a \cdot c \\
b^2 + a^2 &\geq 2 \cdot b \cdot a,
\end{aligned}$$

(0.5 pts)

incorporando las últimas desigualdades en (1), y teniendo en cuenta que a, b y c son números reales positivos, se deduce que

$$\begin{aligned}
(a+b) \cdot (a+c) \cdot (b+c) &\geq 2 \cdot b \cdot c \cdot a + 2 \cdot a \cdot c \cdot b + 2 \cdot b \cdot a \cdot c + 2 \cdot a \cdot b \cdot c \\
&= 2 \cdot a \cdot b \cdot c + 2 \cdot a \cdot b \cdot c + 2 \cdot a \cdot b \cdot c + 2 \cdot a \cdot b \cdot c \\
&= 8 \cdot a \cdot b \cdot c,
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. **(1.0 pto)** *b*) (3.0 ptos) Resuelva la inecuación $|x^2 - 2x| + x|x+3| \geq 3$.

Solución: Como en la inecuación aparecen las expresiones $|x^2 - 2x|$, $|x+3|$, notamos que

i) $x^2 - 2x \geq 0$ si y sólo si $x \leq 0 \vee x \geq 2$.
En efecto,

$$x^2 - 2x \geq 0 \iff x(x-2) \geq 0.$$

Y esto ocurre cuando

$$(x \geq 0 \quad \wedge \quad x - 2 \geq 0) \quad \vee \quad (x \leq 0 \quad \wedge \quad x - 2 \leq 0).$$

En el primer caso

$$x \geq 0 \quad \wedge \quad x \geq 2.$$

Es decir, en el primer caso vamos a tener que $x \in [2, +\infty)$. En el segundo caso,

$$x \leq 0 \quad \wedge \quad x \leq 2.$$

Es decir, en el segundo caso $x \in (-\infty, 0]$. En resumen, $x^2 - 2x \geq 0$ para

$$x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty).$$

(0.4 pts)

ii) $x + 3 \geq 0$ si y sólo si $x \geq -3$.

Teniendo en cuenta la información precedente, el comportamiento de los dos módulos dependerá del rango en que se encuentra x, el cual está dado por:

	$x < -3$	$-3 \leq x \leq 0$	$0 < x < 2$	$x \geq 2$
$\lvert x^2 - 2x \rvert$	$x^2 - 2x$	$x^2 - 2x$	$2x - x^2$	$x^2 - 2x$
$\lvert x+3 \rvert$	$-x - 3$	$x + 3$	$x + 3$	$x + 3$

A continuación, separamos el análisis en los cuatro casos.

<u>Caso 1: $x < -3$.</u> En este caso $|x^2 - 2x| = x^2 - 2x$ y $|x+3| = -x - 3$, por lo tanto la inecuación queda

$$x^2 - 2x + x(-x - 3) \geq 3,$$

o equivalentemente

$$x^2 - 2x - x^2 - 3x \geq 3.$$

Cancelando términos semejantes llegamos a la inecuación

$$-5x \geq 3,$$

es decir,

$$x \leq -\frac{3}{5}.$$

(0.4 pts)

Como la condición $x < -3$, es más restrictiva que la última condición, obtenemos el conjunto solución

$$(-\infty, -3)\,.$$

(0.2 pts)

<u>Caso 2: $-3 \leq x \leq 0$.</u> En este caso $|x^2 - 2x| = x^2 - 2x$ y $|x + 3| = x + 3$, por lo tanto la inecuación queda

$$x^2 - 2x + x(x + 3) \geq 3.$$

Esto equivale a

$$2x^2 + x - 3 \geq 0 \iff (x - 1)(2x + 3) \geq 0,$$

(0.2 pts)

donde en el último paso hemos utilizado que

$$2x^2 + x - 3 = \frac{(2x)^2 + 2x - 6}{2} = \frac{(2x + 3)(2x - 2)}{2}.$$

Ahora,

$$(x - 1)(2x + 3) \geq 0 \iff (x - 1 \geq 0 \;\;\wedge\;\; 2x + 3 \geq 0) \;\;\vee\;\; (x - 1 \leq 0 \;\;\wedge\;\; 2x + 3 \leq 0).$$

En el primer caso

$$x \geq 1 \;\;\wedge\;\; x \geq -\frac{3}{2}.$$

Es decir, en el primer caso vamos a tener que $x \in [1, +\infty)$. En el segundo caso,

$$x \leq 1 \;\;\wedge\;\; x \leq -\frac{3}{2}.$$

Es decir, en el segundo caso $x \in (-\infty, -\frac{3}{2}]$. En resumen, $(x - 1)(2x + 3) \geq 0$ cuando

$$x \in (-\infty, -3/2] \cup [1, +\infty).$$

(0.2 pts)

Así, en este caso el conjunto solución es

$$[-3, 0] \cap ((-\infty, -3/2] \cup [1, +\infty)) = [-3, -3/2].$$

(0.2 pts)

<u>Caso 3: $0 < x < 2$.</u> En este caso $|x^2 - 2x| = 2x - x^2$ y $|x + 3| = x + 3$, por lo tanto la inecuación original queda

$$2x - x^2 + x(x + 3) \geq 3,$$

o equivalentemente

$$2x - x^2 + x^2 + 3x \geq 3.$$

Cancelando términos semejantes llegamos a la inecuación

$$5x \geq 3,$$

esto es,

$$x \geq \frac{3}{5}.$$

(0.4 pts)

Luego, en este caso el conjunto solución es

$$(0,2) \cap [3/5,+\infty) = [3/5,2).$$

(0.2 pts)

Caso 4: $x \geq 2$. En este caso $|x^2-2x| = x^2-2x$ y $|x+3| = x+3$, por lo tanto la inecuación queda

$$x^2 - 2x + x(x+3) \geq 3.$$

Cancelando términos semejantes llegamos a la inecuación

$$2x^2 + x - 3 \geq 0,$$

y por lo visto en el Caso 2, tenemos que

$$x \in (-\infty,-3/2] \cup [1,+\infty),$$

(0.2 pts).

Así, en este caso el conjunto solución es

$$[2,+\infty) \cap ((-\infty,-3/2] \cup [1,+\infty)) = [2,+\infty).$$

(0.2 pts)

Finalmente, el conjunto solución global es la unión de los conjuntos encontrados para cada caso, esto es

$$(-\infty,-3) \cup [-3,-3/2] \cup [3/5,2) \cup [2,\infty) = (-\infty,-3/2] \cup [3/5,+\infty).$$

(0.4 pts)

P2. *a)* (3.0 ptos) Considere dos circunferencias, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. La primera tiene su centro en el origen y un radio de 1, mientras que la segunda tiene su centro en $(2,1)$ y un radio de r. Demuestre que si $1 + r = \sqrt{5}$, entonces $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ tienen exactamente un punto de intersección.

Solución: Un punto que debe cumplir ambas ecuaciones de las circunferencias es aquel que satisface las siguientes condiciones:

$$x^2 + y^2 = 1,$$
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = r^2.$$

(0.4 pts)

Restando estas dos ecuaciones, obtenemos:

$$-4x + 4 - 2y + 1 = r^2 - 1.$$

De donde podemos despejar la variable y:

$$y = -2x + 3 - \frac{r^2}{2}.$$

(0.3 pts)

Dado que hemos establecido que $r = \sqrt{5} - 1$, podemos calcular r^2 como:

$$r^2 = (\sqrt{5} - 1)^2 = 5 - 2\sqrt{5} + 1 = 2(3 - \sqrt{5}).$$

Así, la ecuación de la recta en la que deben estar los puntos comunes a ambas circunferencias es:

$$y = -2x + \sqrt{5}.$$

(0.3 pts)

Notamos que de esta ecuación se deduce que, si dos puntos están en ambas circunferencias y tienen la misma coordenada x, entonces sus coordenadas y también son iguales. Además, podemos reemplazar esta última ecuación en la ecuación de $\mathcal{C}_1$:

$$x^2 + (-2x + \sqrt{5})^2 = 1.$$

(0.7 pts)

Simplificando la expresión anterior, obtenemos:

$$5x^2 - 4\sqrt{5}x + 4 = 0.$$

(0.3 pts)

Esta es una ecuación cuadrática que tiene una única solución si y solo si el discriminante (Δ) es igual a cero. El discriminante se calcula como:

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

donde $a = 5$, $b = -4\sqrt{5}$, y $c = 4$. Calculamos el discriminante:

$$\Delta = (-4\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4 = 80 - 80 = 0.$$

(0.7 pts)

Por lo tanto, esta ecuación tiene una única solución. Esta solución corresponde a la abscisa x del punto en común de ambas circunferencias, y podemos determinar su ordenada y utilizando la ecuación de la recta $y = -2x + \sqrt{5}$. **(0.3 pts)**

b) (3.0 ptos) Un punto $P = (x, y)$ se mueve de modo que las pendientes de las rectas que lo unen a los puntos $A = (a, 0)$ y $A' = (-a, 0)$ tienen un producto constante negativo. Caracterice el lugar geométrico del punto P.

Solución: Sean $A = (a, 0)$, $A' = (-a, 0)$ los puntos dados y $P = (x, y)$ un punto del lugar geométrico. Entonces las rectas que unen el punto P con los puntos A y A' tienen pendientes

$$m_{\overrightarrow{PA}} = \frac{y - 0}{x - a} \quad \text{y} \quad m_{\overrightarrow{PA'}} = \frac{y - 0}{x + a}.$$

(0.7 pts)

Como el producto de las pendientes que conectan el punto $P = (x, y)$ con los puntos A y A' es una constante negativa, podemos expresar esta relación de la siguiente manera:

$$m_{\overrightarrow{PA}} \cdot m_{\overrightarrow{PA'}} = -c,$$

(0.8 pts)

donde c es una constante positiva. Así pues,

$$\left(\frac{y}{x-a}\right)\left(\frac{y}{x+a}\right)=-c \tag{2}$$

y al desarrollar el lado izquierdo de la igualdad anterior

$$\left(\frac{y}{x-a}\right)\left(\frac{y}{x+a}\right)=\frac{y^2}{x^2-a^2}.$$

Luego, incorporando esto en (2) podemos continuar simplificando esta expresión, obteniendo que

$$\begin{aligned}\frac{y^2}{x^2-a^2}&=-c\\ y^2&=-cx^2+ca^2\\ cx^2+y^2&=ca^2\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{ca^2}&=1.\end{aligned}$$

(1.0 pto)

En consecuencia, el lugar geométrico pedido es una elipse centrada en el origen $(0,0)$ y tiene como dos de sus vértices a los puntos A y A'. **(0.5 pts)**

P3. Considere la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\sqrt{1-\dfrac{3}{x+2}}$.

a) (2.0 ptos) Determine el dominio y los ceros de f.

Solución: El dominio de esta función queda definido por

$$\begin{aligned}\operatorname{Dom}(f)&=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;1-\frac{3}{x+2}\geq 0\wedge\frac{3}{x+2}\in\mathbb{R}\right\}\\ &=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;1-\frac{3}{x+2}\geq 0\wedge x\neq -2\right\}\\ &=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;\frac{x-1}{x+2}\geq 0\wedge x\neq -2\right\}.\end{aligned}$$

Como

$$\frac{x-1}{x+2}\geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \textbf{1°)}\; x-1\geq 0\;\wedge\; x+2>0 \quad\vee\quad \textbf{2°)}\; x-1\leq 0\;\wedge\; x+2<0,$$

en el primer caso, se tiene que

$$x\geq 1\quad\wedge\quad x>-2.$$

Es decir, en el primer caso tenemos $x\in[1,+\infty)$. En el segundo caso

$$x\leq 1\quad\wedge\quad x<-2.$$

Es decir, en el segundo caso tenemos $x\in(-\infty,-2)$. Por lo tanto

$$\operatorname{Dom}(f)=(-\infty,-2)\cup[1,+\infty).$$

(1.2 pts)

Los ceros de esta función corresponden a los elementos $x \in \mathrm{Dom}(f)$ tales que $f(x) = 0$. En este caso, se aprecia que

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{3}{x+2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2} = 0.$$

Entonces, $x = 1$ es el único cero de la función. **(0.8 pts)**

b) (1.0 pto) Analice la paridad de esta función.

Solución: Sea $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Entonces, $f(-x) = \sqrt{1 - \frac{3}{2-x}}$. Luego, $f(-x) = f(x)$ si y solo si

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{3}{2-x}} &= \sqrt{1 - \frac{3}{x+2}} \\ \frac{3}{2-x} &= \frac{3}{x+2} \end{aligned}$$

lo cual es cierto si y solo si $x = 0$. Como no se cumple en todo el dominio, entonces la función no puede ser par. **(0.6 pts)**

Análogamente, $f(-x) = -f(x)$ si y solo si

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{3}{2-x}} &= -\sqrt{1 - \frac{3}{x+2}} \\ \sqrt{1 - \frac{3}{2-x}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x+2}} &= 0. \end{aligned}$$

Como $\sqrt{1 - \frac{3}{2-x}}$ y $\sqrt{1 - \frac{3}{x+2}}$ son no negativas, su suma es 0 si y solo si ambas cantidades se anulan. Así,

$$f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{3}{2-x}} = \sqrt{1 - \frac{3}{x+2}} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \wedge x = -1$$

lo cual es una contradicción. Entonces, esta función no puede ser impar. **(0.4 pts)**

c) (1.0 pto) Determine los intervalos donde esta función es creciente o decreciente, según corresponda.

Solución: En primer lugar, la función es creciente en $(-\infty, -2)$. En efecto, sean $x, y \in (-\infty, -2)$, con $x < y$. Entonces,

$$\begin{aligned} x < y &\Leftrightarrow x + 2 < y + 2 < 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{3}{y+2} < \frac{3}{x+2} \\ &\Leftrightarrow 0 < 1 - \frac{3}{x+2} < 1 - \frac{3}{y+2} \\ &\Rightarrow \sqrt{1 - \frac{3}{x+2}} = f(x) < f(y) = \sqrt{1 - \frac{3}{y+2}} \end{aligned}$$

ya que la función raíz cuadrada es creciente en su dominio. **(0.6 pts)**

De forma análoga, se prueba que f es creciente en $[1, +\infty)$. Sin embargo, la función no es creciente en todo su dominio, ya que

$$f(-3) = 2 > 0 = f(1). \qquad \textbf{(0.4 pts)}$$

d) (1.0 pto) Calcule $f([1,2])$.

Solución: Se tiene que

$$\begin{aligned} f([1,2]) &= \{f(x) \mid x \in \operatorname{Dom}(f) \cap [1,2]\} \\ &= \{f(x) \mid x \in [1,2]\}. \end{aligned}$$

Si $x \in [1,2]$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} = \frac{3}{2+2} \leq \frac{3}{x+2} &\leq \frac{3}{1+2} = 1 \\ 0 = 1 - 1 \leq 1 - \frac{3}{x+2} &\leq 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \\ 0 \leq \sqrt{1 - \frac{3}{x+2}} &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Así, $f(x) \in [0, 1/2]$. Por ende, $f([1,2]) \subseteq [0, 1/2]$. **(0.7 pts)**

Luego, si $y \in [0, 1/2]$, entonces la ecuación $f(x) = y$ posee solución para algún $x \in [1,2]$. En efecto,

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{1 - \frac{3}{x+2}} &= y \\ 1 - \frac{3}{x+2} &= y^2 \\ 1 - y^2 &= \frac{3}{x+2} \\ x + 2 &= \frac{3}{1-y^2} \\ x &= \frac{3}{1-y^2} - 2 = \frac{2y^2+1}{1-y^2} \end{aligned}$$

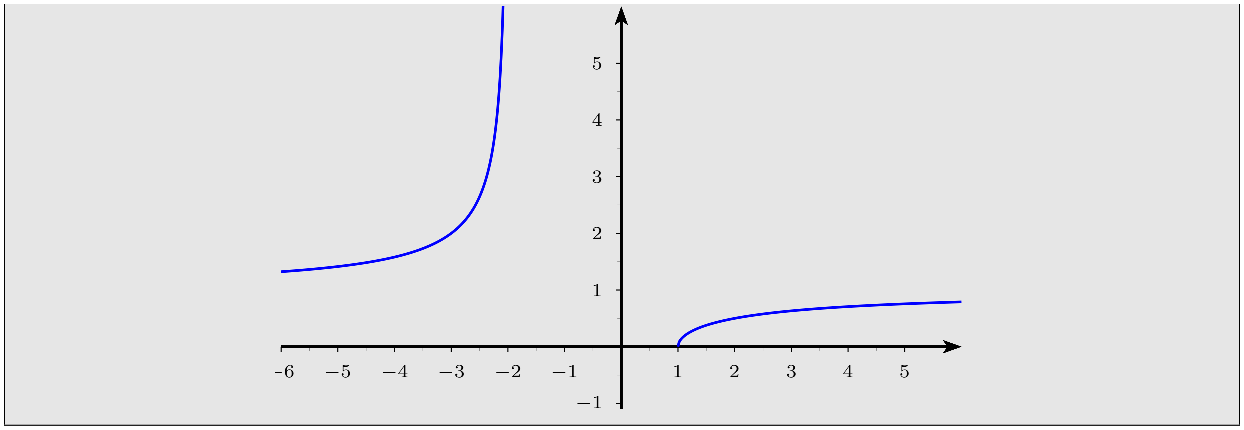
de donde se puede apreciar que $x \in [1,2]$. Luego, $[0, 1/2] \subseteq f([1,2])$. En conclusión,

$$f([1,2]) = [0, 1/2].$$

(0.3 pts)

e) (1.0 pto) Dibuje un bosquejo de la gráfica de f que represente sus respuestas de las partes anteriores.

Solución: El bosquejo debe considerar el dominio **(0.4 pts)**, ceros **(0.2 pts)** y monotonía **(0.4 pts)** de la función de acuerdo a las respuestas de las partes anteriores.



Duración: 3h.