Pauta de corrección Control 1

P1. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}.$$

a) **(1,2 pts.)** Estudie la continuidad de f y calcule los límites de f hacia $\pm\infty$. ¿Tiene f asíntotas verticales?

Solución

La función f es continua en todo $\mathbb{R}$, por ser un cociente de los polinomios x^3 y x^2+1, donde el denominador nunca se anula.

(0,4 pts. por justificar que f es continua)
(0,2 pts. si solo se usa la frase "continua por álgebra y composición de funciones continuas", sin explicitar cuáles funciones)

Alternativa

También se puede establecer la continuidad de f en $\mathbb{R}$ argumentando que es una función racional con dominio igual a $\mathbb{R}$, ya que $x^2+1 \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

En particular, f no tiene asíntotas verticales.

(0,2 pts. por justificar que f no tiene asíntotas verticales)

Además, se tiene que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{x^2}} = +\infty, \qquad \textbf{(0,3 pts. por calcular el límite hacia } +\infty\textbf{)}$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{x^2}} = -\infty. \qquad \textbf{(0,3 pts. por calcular el límite hacia } -\infty\textbf{)}$$

b) **(1,2 pts.)** Estudie la derivabilidad de f, calcule f' donde f sea derivable y encuentre todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f'(\bar{x}) = 0$.

Solución

La función f es derivable en todo $\mathbb{R}$ por ser el cociente de los polinomios x^3 y x^2+1, donde $x^2+1 \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(0,4 pts. por justificar que f es derivable)
(0,2 pts. si solo se usa la frase "derivable por álgebra y composición de funciones derivables", sin explicitar cuáles funciones)

Derivada:

$$f'(x) = \frac{(3x^2)\cdot(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2}. \qquad \textbf{(0,4 pts. por usar la regla del cociente)}$$

Para encontrar los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f'(\bar{x}) = 0$, primero conviene factorizar la derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2\left\{3x^2+3-2x^2\right\}}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}, \end{aligned}$$

luego resolver la ecuación

$$f'(\bar{x}) = 0 \iff \frac{\bar{x}^2(\bar{x}^2+3)}{(\bar{x}^2+1)^2} = 0 \iff \bar{x}^2 = 0 \iff \bar{x} = 0,$$

donde se usó que $\bar{x}^2 + 3 > 0$ para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}$.

(0,4 pts. por obtener $\bar{x} = 0$)

c) **(1,2 pts.)** Encuentre los intervalos (si los hay) donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos de mínimos y máximos, locales y globales, de f.

Solución

Se observa que

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Así, f es creciente en todo $\mathbb{R}$.

(0,6 pts. por determinar que f es creciente)

Alternativa

También se puede indicar que $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$, por lo que f es estrictamente creciente en $(-\infty, 0]$ y en $[0, \infty)$, o sea en $\mathbb{R}$.

Por otro lado, por la parte b), el único candidato a mínimo o máximo local es $\bar{x} = 0$. Sin embargo, $f(0) = 0$, $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} > 0$ para $x > 0$ (no es máximo local) y $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} < 0$ para $x < 0$ (no es mínimo local).
Luego $\bar{x} = 0$ no es ni mínimo ni máximo local, ni global.
Además, al no haber otros candidatos, la función no tiene máximos ni mínimos, locales ni globales.

(0,3 pts. por concluir que f no tiene ni mínimos ni máximos locales)
(0,3 pts. por concluir que f no tiene ni mínimos ni máximos globales)

Alternativa

Al saber que f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, resulta directo que no tiene ni máximos ni mínimos, locales ni globales.

d) **(1,2 pts.)** Determine dónde f es dos veces derivable, calcule f'' allí, y calcule todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f''(\bar{x}) = 0$.

Solución

La función f' es derivable en todo $\mathbb{R}$, por ser el cociente de los polinomios $(x^4 + 3x^2)$ y $(x^2 + 1)^2$, donde el denominador nunca se anula.

(0,4 pts. por justificar que f' es derivable)
(0,2 pts. si solo se usa la frase "derivable por álgebra y composición de funciones derivables", sin explicitar cuáles funciones)

Segunda derivada de f:

$$f''(x) = \frac{(4x^3+6x)\cdot(x^2+1)^2 - (x^4+3x^2)\cdot 2(x^2+1)\cdot(2x)}{(x^2+1)^4}$$ **(0,4 pts. por usar la regla del cociente)**

Para encontrar los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f''(\bar{x}) = 0$, primero conviene factorizar f'':

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2x\big\{(2x^2+3)\cdot(x^2+1) - (2x^4+6x^2)\big\}}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}. \end{aligned}$$

Ahora se resuelve la ecuación

$$f''(\bar{x}) = 0 \iff \frac{2\bar{x}(3-\bar{x}^2)}{(\bar{x}^2+1)^3} = 0 \iff \bar{x}(3-\bar{x}^2) = 0.$$

De donde las soluciones son: $\bar{x} = 0$ y $\bar{x} = \pm\sqrt{3}$.

(0,2 pts. por obtener $\bar{x} = 0$)
(0,2 pts. por obtener $\bar{x} = \pm\sqrt{3}$)

e) **(1,2 pts.)** Determine los intervalos donde f es convexa y donde es cóncava (si los hay).

Solución

Como

$$f''(x) = \frac{2x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3},$$

$2 > 0$ y $(x^2 + 1)^3 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, resulta que el signo de $f''(x)$ es igual al signo del polinomio del numerador

$$h(x) = x(3 - x^2).$$

(0,2 pts. por reducir el análisis a estudiar el numerador)

Para determinar los signos h, se pueden usar tres métodos.

Primera forma para encontrar los signos de h (factorizando)

Se observa que

$$h(x) = x(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)$$

(0,2 pts. por factorizar h)

Por lo que se puede hacer la tabla (como el primer semestre):

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$\sqrt{3} - x$	$+$	$+$	$+$	$-$
$\sqrt{3} + x$	$-$	$+$	$+$	$+$
$h(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$

(0,6 pts. por los signos de cada fila)

Segunda forma para encontrar los signos de h (usando el teorema de los valores intermedios y evaluando)

Por ser un h un polinomio, es continuo. Por lo tanto, por el teorema de los valores intermedios, entre cualquier cambio de signo de h debe haber un cero de h. Se concluye que el signo de h es constante en los intervalos $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3})$ y $(\sqrt{3}, \infty)$.

(0,2 pts. por justificar que el signo de h es constante en estos intervalos)

De este modo, basta evaluar en algún punto de estos intervalos para determinar el signo. Por ejemplo:

$$h(-2) = 2 > 0 \implies f''(x) > 0 \text{ para todo } x \in (-\infty, -\sqrt{3})$$

(0,15 pts. por obtener signo positivo en $(-\infty, -\sqrt{3})$)

$$h(-1) = -2 < 0 \implies f''(x) < 0 \text{ para todo } x \in (-\sqrt{3}, 0)$$

(0,15 pts. por obtener signo negativo en $(-\sqrt{3}, 0)$)

$$h(1) = 2 > 0 \implies f''(x) > 0 \text{ para todo } x \in (0, \sqrt{3})$$

(0,15 pts. por obtener signo positivo en $(0, \sqrt{3})$)

$$h(2) = -2 < 0 \implies f''(x) < 0 \text{ para todo } x \in (\sqrt{3}, \infty).$$

(0,15 pts. por obtener signo negativo en $(\sqrt{3}, \infty)$)

Tercera forma para encontrar los signos de h (desarrollando las desigualdades directamente)

Primero se resuelve la siguiente inecuación (o su complementaria):

$$\begin{aligned}
f''(x) > 0 &\iff h(x) > 0 \\
&\iff x(3 - x^2) > 0 \\
&\iff [(x < 0) \text{ y } (3 - x^2 < 0)] \text{ ó } [(x > 0) \text{ y } (3 - x^2 > 0)] \\
&\iff [(x < 0) \text{ y } (x^2 > 3)] \text{ ó } [(x > 0) \text{ y } (x^2 < 3)] \\
&\iff [(x < 0) \text{ y } (x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)] \text{ ó } [(x > 0) \text{ y } (x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}))] \\
&\iff [x \in (-\infty, -\sqrt{3})] \text{ ó } [x \in (0, \sqrt{3})] \\
&\iff x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3}).
\end{aligned}$$

(0,6 pts. por resolver la inecuación $f''(x) > 0$)

Luego se escribe la solución de la inecuación complementaria: f'' será no positiva en el complemento del conjunto anterior. Es decir, $f''(x) \leq 0$ si y solo si $x \in [-\sqrt{3}, 0] \cup [\sqrt{3}, \infty)$.

(0,2 pts. por encontrar el signo en el complemento)

En resumen, la tabla de convexidad de f es la siguiente:

	$(-\infty, -\sqrt{3}]$	$[-\sqrt{3}, 0]$	$[0, \sqrt{3}]$	$[\sqrt{3}, \infty)$
$f''(x)$	≥ 0	≤ 0	≥ 0	≤ 0
$f(x)$	$\smile$	$\frown$	$\smile$	$\frown$

(0,2 pts. determinar dónde f es convexa y dónde es cóncava)

P2. a) **(2,0 pts.)** Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua, donde $a < b$. En base a los teoremas y definiciones, justifique que f es uniformemente continua en el intervalo abierto (a, b).

Solución

Por teorema conocido, toda función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ es uniformemente continua en dicho intervalo. Por lo tanto, f es automáticamente uniformemente continua en $[a, b]$.

(1,0 pto. por obtener que f es uniformemente continua en $[a, b]$)

Falta demostrar que f es uniformemente continua en (a, b). Es decir, se debe demostrar que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x, y \in (a, b), \quad (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon). \tag{1}$$

(0,25 pts. por escribir esta definición)

Como f es uniformemente continua en $[a, b]$, se tiene que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x, y \in [a, b], \quad (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon). \tag{2}$$

(0,25 pts. por escribir esta definición)

Además, la proposición (2) implica la proposición (1), ya que el “δ” que existe en la segunda proposición sirve para un rango de variación de x e y más grande que en la primera. Así, (1) es verdadera y se concluye que f es uniformemente continua en (a, b).

(0,5 pts. por concluir que la continuidad uniforme en $[a, b]$ implica la continudad uniforme en (a, b))

b) **(2,0 pts.)** Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Demuestre que si además, para todo $x \in \mathbb{R}$, se cumple que $\big(f(x)\big)^2 = \big(g(x)\big)^2$ (o sea, las funciones tienen igual cuadrado), entonces se cumple que

$$\Big(\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x)\Big) \quad \text{ó} \quad \Big(\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -g(x)\Big).$$

Solución

Del dato:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \big(f(x)\big)^2 = \big(g(x)\big)^2,$$

resulta que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Big[\Big(f(x) = g(x)\Big) \quad \text{ó} \quad \Big(f(x) = -g(x)\Big)\Big]. \tag{3}$$

(0,4 pts. por mostrar que $f(x) = g(x)$ ó $f(x) = -g(x)$ para cada x fijo)

Observación

Esto no es lo que se pide demostrar, ya que, por ejemplo, las funciones

$$f(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad y \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ -1 & si\ x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

satisfacen (3), pero no lo que se pide.

Para demostrar lo que se pide, se procede por contradicción. Si lo que se pide demostrar fuese falso, se tendría que

$$\Big(\exists x_1 \in \mathbb{R}, \quad f(x_1) \neq g(x_1)\Big) \quad \text{y} \quad \Big(\exists x_2 \in \mathbb{R}, \quad f(x_2) \neq -g(x_2)\Big).$$

(0,4 pts. por encontrar la negación de la proposición)

Combinando esto con (3) queda

$$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad g(x_1) = -f(x_1) \quad \wedge \quad g(x_2) = f(x_2).$$

Así, usando que f es estrictamente positiva, resulta que g cumple:

(i) Es continua en todo $\mathbb{R}$;
(ii) $g(x_1) < 0$; y
(iii) $g(x_2) > 0$.

(0,3 pts. por verificar las hipótesis del teorema de los valores intermedios)

Así, por el teorema de los valores intermedios, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(c) = 0$.

(0,3 pts. por usar el teorema de los valores intermedios)

Pero de (3), se concluye que $f(c) = 0$. **(0,3 pts. por obtener que $f(c) = 0$)**

Esto contradice que f es estrictamente positiva. **(0,3 pts. por obtener la contradicción)**

c) **(2,0 pts.)** Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ dos funciones continuas tales que $f(0) = 0$, $g(0) = 1$ y $g(1) = 0$ y sea $\alpha > 0$ fijo. Demuestre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = g(\alpha c)$.

Solución

Sea $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función auxiliar dada por $h(x) = f(x) - g(\alpha x)$. **(0,3 pts. por definir h)**

Se tiene que h es continua por resta y composición de funciones continuas (resta de f con la composición de g con $x \mapsto \alpha x$). **(0,4 pts. por justificar que h es continua)**

Además,

$$h(0) = f(0) - g(\alpha \cdot 0) = f(0) - g(0) = 0 - 1 = -1 < 0,$$
$$h\left(\tfrac{1}{\alpha}\right) = f\left(\tfrac{1}{\alpha}\right) - g\left(\alpha \cdot \tfrac{1}{\alpha}\right) = f\left(\tfrac{1}{\alpha}\right) - g(1) = f\left(\tfrac{1}{\alpha}\right) - 0 = f\left(\tfrac{1}{\alpha}\right) \geq 0,$$

donde la última desigualdad sale de que el codominio de f es $[0,1]$.

(0,3 pts. por obtener $h(0) < 0$)

(0,3 pts. por obtener $h\left(\frac{1}{\alpha}\right) \geq 0$)

Así, resulta que

$$h(0) \cdot h\left(\tfrac{1}{\alpha}\right) \leq 0,$$

por lo que, al cumplirse las hipótesis del teorema de los valores intermedios (versión Bolzano) en el intervalo $\left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$, resulta que existe $c \in \left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$ tal que $h(c) = 0$.

(0,5 pts. por usar el teorema de los valores intermedios)

Finalmente, por definición de h se concluye que $f(c) - g(\alpha c) = 0$, lo que es equivalente a $f(c) = g(\alpha c)$.

(0,2 pts. por concluir)

P3. a) Sea $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ una función convexa, derivable y epiyectiva tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

i) **(1,0 pto.)** Justifique que f es invertible.

Solución

Como, por hipótesis, f es epiyectiva, para que sea invertible solo es necesario demostrar que f es inyectiva.

(0,3 pts. por justificar que basta la inyectividad de f)

Además, se sabe que $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, lo que implica que f es estrictamente creciente.

(0,4 pts. por justificar que f es estrictamente creciente)

Luego f es inyectiva al ser estrictamente creciente.

(0,3 pts. por usar que f es estrictamente creciente para mostrar que es inyectiva)

Alternativa

También se puede usar que f es estrictamente creciente más explícitamente, argumentando que, si $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$, y luego que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

ii) **(1,0 pto.)** Determine si f^{-1} es cóncava o convexa.

Solución

Para saber si f^{-1} es cóncava o convexa, conviene determinar si su derivada $(f^{-1})'$ es creciente o decreciente.

(0,1 pts. por escribir esta caracterización de la convexidad o concavidad de f^{-1})

Como f' es estrictamente positiva, nunca es cero. Así, para todo $y > 0$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \tag{4}$$

(0,2 pts. por usar la fórmula de la derivada de una función inversa)

Como f es estrictamente creciente, f^{-1} también lo es.

(0,1 pts. por decir que f^{-1} es estrictamente creciente)

Complemento

También se puede indicar que, como $f'(x) > 0$, de (4) se deduce que $(f^{-1})'(y) > 0$, por lo que f^{-1} es estrictamente creciente.

Además, como f es convexa, se sabe que su derivada f' es creciente. Por lo tanto, si $0 < y_1 < y_2$, resulta que:

$$\begin{aligned}
& f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) && \textbf{(0,1 pts. por usar que } f^{-1} \textbf{ es estrictamente creciente)} \\
\implies\ & f'(f^{-1}(y_1)) \leq f'(f^{-1}(y_2)) && \textbf{(0,1 pts. por usar que } f' \textbf{ es creciente)} \\
\implies\ & \frac{1}{f'(f^{-1}(y_1))} \geq \frac{1}{f'(f^{-1}(y_2))} && \textbf{(0,1 pts. por tomar recíproco)} \\
\iff\ & (f^{-1})'(y_1) \geq (f^{-1})'(y_2), && \textbf{(0,1 pts. por usar (4))}
\end{aligned}$$

donde, al tomar el recíproco, se usó nuevamente que $f' > 0$.

Se concluye así que $(f^{-1})'$ es decreciente, lo que muestra que f^{-1} es cóncava.

(0,2 pts. por concluir)

b) **(2,0 pts.)** Escriba el desarrollo de Taylor de orden 5 (polinomio y resto) para $f(x) = \cos(x)$ en torno a $\bar{x} = 0$. Úselo para demostrar que

$$\left|\cos(1) - \frac{13}{24}\right| \leq \frac{1}{6!}.$$

Solución

Recuerdos: El polinomio de Taylor T_f^5 de f entorno a $\bar{x}$ es

$$T_f^5(x - \bar{x}) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{f''(\bar{x})}{2}(x - \bar{x})^2 + \frac{f^{[3]}(\bar{x})}{3!}(x - \bar{x})^3 + \frac{f^{[4]}(\bar{x})}{4!}(x - \bar{x})^4 + \frac{f^{[5]}(\bar{x})}{5!}(x - \bar{x})^5.$$

En el caso $\bar{x} = 0$, esto queda

$$T_f^5(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{[3]}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{[4]}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{[5]}(0)}{5!}x^5. \tag{5}$$

(0,3 pts. por escribir la definición del polinomio de Taylor de orden 5 en torno a $\bar{x} = 0$)

Además, la fórmula de Taylor (Teorema) para $\bar{x} = 0$ establece que

$$f(x) = T_f^5(x) + \frac{f^{[6]}(\xi)}{6!}(x)^6, \tag{6}$$

donde $\xi = 0$, $\xi \in (x, 0)$ o $\xi \in (0, x)$, según si $x = 0$, $x < 0$ o si $x > 0$. (En palabras, ξ está entre 0 y x).

(0,2 pts. por escribir la fórmula de Taylor)

Cálculo de las derivadas:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x) & f(0) &= \cos(0) = 1 \\ f'(x) &= -\operatorname{sen}(x) & f'(0) &= -\operatorname{sen}(0) = 0 \\ f''(x) &= -\cos(x) & f''(0) &= -\cos(0) = -1 \\ f'''(x) &= \operatorname{sen}(x) & f'''(0) &= \operatorname{sen}(0) = 0 \\ f^{[4]}(x) &= \cos(x) & f^{[4]}(0) &= \cos(0) = 1 \\ f^{[5]}(x) &= -\operatorname{sen}(x) & f^{[5]}(0) &= -\operatorname{sen}(0) = 0 \\ f^{[6]}(x) &= -\cos(x). \end{aligned}$$

(0,5 pts. por calcular las derivadas)

Reemplazando en (5) resulta

$$T_f^5(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4.$$

(0,3 pts. por encontrar el polinomio de Taylor)

y reemplazando en (6) queda

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{\cos(\xi)}{6!}x^6, \tag{7}$$

donde $\xi = 0$, $\xi \in (x, 0)$ o $\xi \in (0, x)$, según si $x = 0$, $x < 0$ o si $x > 0$. (En palabras, ξ está entre 0 y x).

(0,2 pts. por encontrar el desarrollo de Taylor con resto)

Finalmente, evaluando en $x = 1$ en (7) resulta

$$\cos(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{\cos(\xi)}{6!} = \frac{13}{24} - \frac{\cos(\xi)}{6!}$$

para algún $\xi \in (0, 1)$.

(0,3 pts. por evaluar en $x = 1$)

Reordenando, y tomando valor absoluto, se concluye que

$$\left|\cos(1) - \frac{13}{24}\right| = \left|-\frac{\cos(\xi)}{6!}\right| = \frac{|\cos(\xi)|}{6!} \leq \frac{1}{6!},$$

ya que $|\cos(t)| \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(0,2 pts. por concluir)

c) **(2,0 pts.)** Calcule el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right)}{x^6}.$$

<u>Indicación:</u> Puede hacer el cálculo directo o usar astutamente el desarrollo de Taylor ya encontrado en b).

Solución

Primera forma (usando la parte b))

Usando el desarrollo de Taylor de b), se tiene que

$$\cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right) = -\frac{\cos(\xi)}{6!}x^6$$

de donde, para todo $x \neq 0$,

$$\frac{\cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right)}{x^6} = -\frac{\cos(\xi)}{6!}.$$

(0,7 pts. por reescribir la función en términos del resto de Taylor)

Como $\xi \in (x, 0)$ si $x < 0$ y $\xi \in (0, x)$ si $x > 0$, se tiene que $\xi \to 0$ si $x \to 0$.

(0,6 pts. por justificar que $\boldsymbol{\xi \to 0}$ si $\boldsymbol{x \to 0}$)

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right)}{x^6} = \lim_{\xi\to 0}\left(-\frac{\cos(\xi)}{6!}\right) = -\frac{\cos(0)}{6!} = -\frac{1}{6!},$$

donde en la penúltima igualdad se usó que el coseno es continuo en $\bar{x} = 0$.

(0,7 pts. por completar el cálculo usando la continuidad del coseno)

Segunda forma (usando la regla de l'Hôpital)

Como el límite es de la forma "0/0", se puede usar la regla de l'Hôpital.

(0,1 pts. por indicar que es de la forma "0/0")

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\right)}{x^6}\overset{\text{(l'Hôp.)}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(x)-\left(-x+\frac{x^3}{3!}\right)}{6x^5}$$

(0,1 pts. por marcar que la igualdad de l'Hôpital es condicional a que límites existan)

(0,1 pts. por derivar)

(0,1 pts. por decir que el denominador diferente de cero)

(0,1 pts. por indicar que es de la forma "0/0")

$$\overset{\text{(l'Hôp.)}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)-\left(-1+\frac{x^2}{2}\right)}{6\cdot 5x^4}$$

(0,1 pts. por marcar que la igualdad de l'Hôpital es condicional a que límites existan)

(0,1 pts. por derivar)

(0,1 pts. por decir que el denominador diferente de cero)

(0,1 pts. por indicar que es de la forma "0/0")

$$\overset{\text{(l'Hôp.)}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)-x}{6\cdot 5\cdot 4\cdot x^3}$$

(0,1 pts. por marcar que la igualdad de l'Hôpital es condicional a que límites existan)

(0,1 pts. por decir que el denominador diferente de cero)

(0,1 pts. por indicar que es de la forma "0/0")

$$\overset{\text{(l'Hôp.)}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot x^2}$$

(0,1 pts. por marcar que la igualdad de l'Hôpital es condicional a que límites existan)

(0,1 pts. por decir que el denominador diferente de cero)

(0,1 pts. por indicar que es de la forma "0/0")

$$\overset{\text{(l'Hôp.)}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(x)}{6!x}$$

(0,1 pts. por marcar que la igualdad de l'Hôpital es condicional a que límites existan)

(0,1 pts. por decir que el denominador diferente de cero)

$$= \quad -\frac{1}{6!}.$$

(0,3 pts. por límite conocido (o usar l'Hôpital de nuevo))