Control 1

P1. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}.$$

a) **(1,2 pts.)** Estudie la continuidad de f y calcule los límites de f hacia $\pm\infty$. ¿Tiene f asíntotas verticales?

b) **(1,2 pts.)** Estudie la derivabilidad de f, calcule f' donde f sea derivable y encuentre todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f'(\bar{x}) = 0$.

c) **(1,2 pts.)** Encuentre los intervalos (si los hay) donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos de mínimos y máximos, locales y globales, de f.

d) **(1,2 pts.)** Determine dónde f es dos veces derivable, calcule f'' allí, y calcule todos los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f''(\bar{x}) = 0$.

e) **(1,2 pts.)** Determine los intervalos donde f es convexa y donde es cóncava (si los hay).

P2. a) **(2,0 pts.)** Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua, donde $a < b$. En base a los teoremas y definiciones, justifique que f es uniformemente continua en el intervalo abierto (a,b).

b) **(2,0 pts.)** Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Demuestre que si además, para todo $x \in \mathbb{R}$, se cumple que $\big(f(x)\big)^2 = \big(g(x)\big)^2$ (o sea, las funciones tienen igual cuadrado), entonces se cumple que

$$\Big(\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = g(x)\Big) \quad \text{ó} \quad \Big(\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = -g(x)\Big).$$

c) **(2,0 pts.)** Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ dos funciones continuas tales que $f(0) = 0$, $g(0) = 1$ y $g(1) = 0$ y sea $\alpha > 0$ fijo. Demuestre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = g(\alpha c)$.

P3. a) Sea $f\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ una función convexa, derivable y epiyectiva tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

i) **(1,0 pto.)** Justifique que f es invertible.
ii) **(1,0 pto.)** Determine si f^{-1} es cóncava o convexa.

b) **(2,0 pts.)** Escriba el desarrollo de Taylor de orden 5 (polinomio y resto) para $f(x) = \cos(x)$ en torno a $\bar{x} = 0$. Úselo para demostrar que

$$\left|\cos(1) - \frac{13}{24}\right| \leq \frac{1}{6!}.$$

c) **(2,0 pts.)** Calcule el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right)}{x^6}.$$

<u>*Indicación:*</u> *Puede hacer el cálculo directo o usar astutamente el desarrollo de Taylor ya encontrado en b).*

Duración: 3h.