Pauta de corrección Control Recuperativo (Controles 1 a 5)

P1. a) **(3 pts.)** Determine e identifique el Lugar Geométrico de los puntos $P(x,y)$ del plano tales que el producto de las pendientes de las rectas L_{PA} y L_{PB} es 2, donde $A(a,0)$, $B(-a,0)$, $a>0$.

Solución: Claramente: $m_{PA} = \dfrac{y}{x-a}$ y $m_{PB} = \dfrac{y}{x+a}$ 1.0

P pertenece al lugar geométrico ssi

$$\begin{aligned} m_{PA}\cdot m_{PB} = 2 &\iff \frac{y}{(x-a)}\frac{y}{(x+a)} = 2 && 0.5\\ &\iff y^2 = 2(x^2-a^2) \quad \wedge \quad |x| \neq a\\ &\iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2a^2} = 1 \quad \wedge \quad y \neq 0 && 1.0 \end{aligned}$$

Que corresponde a una hipérbola. 0.5

sin los puntos (a,0) y (-a,0) **(no descontar por no indicar esto)**

b) **(3 pts.)** Demostrar la identidad: $\operatorname{cosec}^4 x - 1 = 2\cot^2 x + \cot^4 x$.

Solución: Claramente:

$$\operatorname{cosec}^4 x - 1 = (\operatorname{cosec}^2 x - 1)(\operatorname{cosec}^2 x + 1). \quad 1.0$$

Además,

$$\begin{aligned} &= (\cot^2 x + 1 - 1)(\cot^2 x + 1 + 1) && 1.0\\ &= \cot^2 x(2+\cot^2 x)\\ &= 2\cot^2 x + \cot^4 x && 1.0 \end{aligned}$$

(2.0 por manipulaciones algebraicas + 1.0 por la identidad)

Solución Alternativa (partiendo del lado derecho)

$$\begin{aligned} 2\cot^2 x + \cot^4 x &= \cot^2 x(2+\cot^2 x)\\ &= (\operatorname{cosec}^2 x - 1)(2 + \operatorname{cosec}^2 x - 1)\\ &= (\operatorname{cosec}^2 x - 1)(\operatorname{cosec}^2 x + 1).\\ &= \operatorname{cosec}^4 x - 1 \end{aligned}$$

OTRA SOLUCIÓN ALTERNATIVA EN HOJA EXTRA

P2. a) **(3 pts)** Sea (s_n) una sucesión de términos positivos. Demuestre que si

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ se cumple que } s_{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+4}\right) s_n$$

Entonces (s_n) es convergente y su límite es cero.

Solución: La condición dada implica que (s_n) es decreciente. 1.0

Como además es acotada inferiormente por 0, es convergente. 1.0

Tomando límite en la condición dada, se llega a $L = \frac{1}{2}L$, de donde $L = 0$. 1.0

Solución Alternativa

Con la condición indicada, se puede probar por inducción 1.0

que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ s_n \leq s_0 \cdot (\frac{3}{4})^n$ (Obs: es 1.0 por establecer la desigualdad (sin demostración) + 1.0 por la demostración por inducción) 1.0

Luego, como $0 \leq s_n$, se usa sandwich para concluir que $s_n \to 0$. 1.0

b) Calcule los siguientes límites (Justifique apropiadamente sus respuestas)

i) **(1.5 pts)** $\lim \left(\dfrac{n+1}{2n}\right)^n + \sqrt[n]{\dfrac{n+1}{2n}}$

Solución: Sea $a_n = \frac{n+1}{2n}$. Claramente $a_n \to \frac{1}{2}$. 0.5

Por lo tanto $a_n^n \to 0$ (por Teorema). 0.5

y $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ (por Teorema). 0.5

El límite pedido es 1. (Ya considerado en la descomposición) 0.0

ii) **(1.5 pts)** $\lim \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2n}{3n^2 + \sqrt{k}}$

Solución: Claramente

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2n}{3n^2 + \sqrt{n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2n}{3n^2 + \sqrt{k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2n}{3n^2 + \sqrt{0}}$$ 0.5

De aquí resulta que

$$\frac{2n^2}{3n^2 + \sqrt{n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2n}{3n^2 + \sqrt{k}} \leq \frac{2}{3}$$ 0.5

Luego (por sandwich) el límite pedido es $2/3$. (Basta con indicar los límites de las cotas) 0.5

$$\operatorname{cosec}^4(x) - 1 = 2\cot^2(x) + \cot^4(x)$$

$$= \frac{2\cos^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} + \frac{\cos^4(x)}{\operatorname{sen}^4(x)}$$

$$= \frac{2\cos^2(x)\operatorname{sen}^2(x) + \cos^4(x)}{\operatorname{sen}^4(x)}$$

$+1.0$

$$= \frac{\cos^2(x)\left(\operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)\right)}{\operatorname{sen}^4(x)}$$

$+0.5$ por usar identidad fundamental

$$= \frac{\cos^2(x)\left(1 + \operatorname{sen}^2(x)\right)}{\operatorname{sen}^4(x)}$$

$\# \cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$

$+0.5$

$$= \frac{\left(1 - \operatorname{sen}^2(x)\right)\left(1 + \operatorname{sen}^2(x)\right)}{\operatorname{sen}^4(x)}$$

$+0.5$ por usar identidad fundamental

$$= \frac{1 - \operatorname{sen}^4(x)}{\operatorname{sen}^4(x)}$$

$$= \operatorname{cosec}^4(x) - 1 \;//$$

$+0.5$