Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1001: Introducción al Cálculo 2023-1

Pauta de corrección Control 6

P1. a) **(3 pts.)** Usando la caracterización $\varepsilon - \delta$ del límite de funciones, demostrar que $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{2x+1} = 3$.

Solución: PDQ:$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \geq -\frac{1}{2}\left[0 < |x-4| \leq \delta \Rightarrow |\sqrt{2x+1}-3| \leq \varepsilon\right]$ 1.0

Si $x \geq -\frac{1}{2}$ y $|x-4| \leq \delta$, se tiene que:

$$|\sqrt{2x+1}-3| = \frac{2|x-4|}{\sqrt{2x+1}+3} \leq \frac{2\delta}{3}$$ (También se puede acotar $\leq \delta$) 1.0

Luego, basta tomar $\delta = \frac{3}{2}\varepsilon$ para concluir la demostración. (en ese caso $\delta = \varepsilon$) 1.0

b) **(3 pts.)** Calcule los siguientes límites exponenciales: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x - e}{x-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\exp\left(\frac{n+1}{n}\right) - e\right)$.

(Obs: Puede usar un límite para determinar el otro o los puede calcular por separado.)

Solución: El primer límite se puede calcular usando el c.v. $u = x - 1 \to 0$. 0.5

Claramente, si $x \neq 1$ se tiene que $u \neq 0$. (Sin descuento: Acuerdo de profesores) 0.0

Así el límite es:

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x - e}{x-1} = \lim_{u\to 0}\frac{e^{u+1}-e}{u} = \lim_{u\to 0} e\frac{e^u - 1}{u} = e.$$ 0.5 0.5

El segundo límite es un caso particular del primero, donde aparece la sucesión (S_n) definida por $s_n = \frac{n+1}{n}$ en lugar de x. Claramente (s_n) converge a 1 y es diferente de 1. ~~0.3~~ **0.5** ~~0.2~~

Así

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\exp\left(\tfrac{n+1}{n}\right) - e\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{s_n}-e}{s_n - 1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{e^x - e}{x-1} = e.$$ 1.0

Alternativamente, el segundo límite se puede calcular factorizando por e y luego por sandwich usando las desigualdades de la exponencial, del modo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\exp\left(\tfrac{n+1}{n}\right) - e\right) = \lim_{n\to\infty} e\cdot n\left(\exp\left(\tfrac{1}{n}\right) - 1\right)$$ 0.5

Además, como

$$1 + \frac{1}{n} \leq \exp\left(\tfrac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1}, \qquad \forall n > 1,$$

se tiene que

$$1 \leq n\left[\exp\left(\tfrac{1}{n}\right) - 1\right] \leq \frac{n}{n-1}, \qquad \forall n > 1$$ 0.5

de donde, el sandwich entrega que el límite (parcial) es igual a 1, y el límite pedido es e. 0.5

También se pueden combinar ambos métodos, primero factorizando por "e" 0.5
y luego decir que

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\exp\left(\tfrac{1}{n}\right) - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1.$$ 1.0

Otra forma es invocar directamente la proposición 11.10 de la página 189 del apunte:

Como $s_n = \frac{n+1}{n}$ converge a 1 y es diferente de 1. ~~0.3~~ **0.5** ~~0.2~~

Así

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\exp\left(\tfrac{n+1}{n}\right) - e\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{s_n}-e}{s_n-1}\right) = e$$ 0.5 0.5

P2. a) **(3 pts.)** Calcule los límites laterales y decida si existe el $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(|\alpha x|) - |\beta x|}{x}$, donde $\alpha > \beta > 0$.

Solución: **Limite lateral por la derecha**: $x > 0 \Rightarrow \alpha x > 0$ y $\beta x > 0$, por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(|\alpha x|) - |\beta x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x) - \beta x}{x}$$ 0.5

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{x} - \beta = \alpha - \beta; \qquad (**)$$ 0.5

(**) Límite auxiliar:(0.6 ptos. distribuidos del modo siguiente:)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{\alpha x}\alpha; \qquad u = \alpha x \to 0$$ 0.4

Además, si $x \neq 0$, $u \neq 0$ (Sin descuento) 0.0

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u}\alpha = \alpha.$$ 0.2

Limite lateral por la izquierda: Si $x < 0$, entonces $\alpha x < 0$ y $\beta x < 0$, por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(|\alpha x|) - |\beta x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(-\alpha x) + \beta x}{x}$$ 0.5

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen}(\alpha x)}{x} + \beta = \beta - \alpha.$$ 0.5

Como ambos límites son diferentes, el límite no existe. 0.4

b) Calcule los siguientes límites, indicando los límites auxiliares y cambios de variable (si corresponde) usados

i) **(1.5 pts)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(ax)}{e^{bx^2}-1}$, $(a, b \neq 0)$

Solución: Ordenando queda:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{e^{bx^2}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos(ax)}{x^2}}{\frac{e^{bx^2}-1}{x^2}} = \frac{a^2}{2b}.$$ 0.5

Límites auxiliares:(0.5 ptos. cada uno, distribuidos del modo siguiente:)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2}a^2; \qquad u = ax \to 0$$ 0.3

Además, si $x \neq 0$, $u \neq 0$ (Sin descuento) 0.0

$$= \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos(u)}{u^2}a^2 = \frac{a^2}{2}.$$ 0.2

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{bx^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{bx^2}-1}{bx^2}b; \qquad u = bx^2 \to 0$$ 0.3

Además, si $x \neq 0$, $u \neq 0$ (Sin descuento) 0.0

$$= \lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u}b = b.$$ 0.2

ii) **(1.5 pts)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x^4}{\ln(x^5)}$

Solución: Ordenando queda:

0.5

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^4}{\ln(x^5)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3(1-x)}{5\ln(x)} = \frac{1}{5}.$$ 1.0