Examen

P1. a) Considere la función $f\colon (-4,4) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = |x^2 - 4|.$$

i) (2,0 pts.) Encuentre el conjunto $D \subseteq (-4,4)$ de todos los puntos $\bar{x} \in (-4,4)$ tales que f es derivable en $\bar{x}$.

Solución:
Consideramos varios casos:

Caso 1: Si $x \in (2,4)$, tenemos que $x^2 - 4 > 0$ por lo que $f(x) = x^2 - 4$, que es una función derivable por álgebra y composición de funciones derivables. Por lo tanto, $(2,4) \subseteq D$.

Caso 2: Si $x \in (-4,-2)$, tenemos que $x^2 - 4 > 0$ por lo que $f(x) = x^2 - 4$, que es una función derivable por álgebra y composición de funciones derivables. Por lo tanto, $(-4,-2) \subseteq D$.

Caso 3: Si $x \in (-2,2)$, tenemos que $x^2 - 4 < 0$ por lo que $f(x) = -(x^2-4) = 4 - x^2$, que es una función derivable por álgebra y composición de funciones derivables. Por lo tanto, $(-2,2) \subseteq D$.

Caso 4: Si $\bar{x} = -2$, tenemos que $f(\bar{x}) = 0$. En este caso, debemos determinar si f es derivable en $\bar{x}$ por definición. Notemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\bar{x}^-} \frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}} &= \lim_{x\to\bar{x}^-} \frac{(x^2-4)-0}{x+2} = \lim_{x\to\bar{x}^-} (x-2) = -4 \\
\lim_{x\to\bar{x}^+} \frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}} &= \lim_{x\to\bar{x}^+} \frac{(4-x^2)-0}{x+2} = \lim_{x\to\bar{x}^+} (2-x) = 4
\end{aligned}$$

Como los límites laterales no coinciden, esto demuestra que el límite no existe y que f no es derivable en $\bar{x} = -2$.

Caso 5: Si $\bar{x} = 2$, tenemos que $f(\bar{x}) = 0$. En este caso, debemos determinar si f es derivable en $\bar{x}$ por definición. Notemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\bar{x}^-} \frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}} &= \lim_{x\to\bar{x}^-} \frac{(4-x^2)-0}{x-2} = \lim_{x\to\bar{x}^-} -(x+2) = -4 \\
\lim_{x\to\bar{x}^+} \frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}} &= \lim_{x\to\bar{x}^+} \frac{(x^2-4)-0}{x-2} = \lim_{x\to\bar{x}^+} (x+2) = 4
\end{aligned}$$

Como los límites laterales no coinciden, esto demuestra que el límite no existe y que f no es derivable en $\bar{x} = 2$.

Concluimos de esta forma que $D = (-4,-2) \cup (-2,2) \cup (2,4)$.

ii) (1,5 pts.) Encuentre los intervalos de crecimiento de f.

Solución:
Analizamos tres casos:

Caso 1: Si $x \in (2,4)$, tenemos que $f(x) = x^2 - 4$ por lo que $f'(x) = 2x > 0$. Así, f es creciente en este intervalo.

Caso 2: Si $x \in (-4,-2)$, tenemos que $f(x) = x^2 - 4$ por lo que $f'(x) = 2x < 0$. Así, f es decreciente en este intervalo.

Caso 3: Si $x \in (-2,2)$, tenemos que $f(x) = 4 - x^2$ por lo que $f'(x) = -2x$. Por lo tanto, el signo de f' dependerá de si x es positivo o negativo. Vemos que $f'(x) > 0$ si $x < 0$ y que $f'(x) < 0$ si $x > 0$. Por lo tanto, f es creciente en $(-2,0)$, y decreciente en $(0,2)$.

En resumen, concluimos lo siguiente:

	-4 a -2	-2 a 0	0 a 2	2 a 4
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Tabla 1: Tabla de crecimiento de f.

iii) (0,5 pts.) Bosqueje f indicando claramente los intervalos en los que es creciente y decreciente, y los puntos donde no es derivable.

Solución:
A continuación se muestra el gráfico de f, donde se incluyen flechas "$\nearrow$" para indicar las zonas en las que es creciente y flechas "$\searrow$" para indicar donde es decreciente. Además, se marcaron los puntos en los que f no es derivable con un semicírculo.

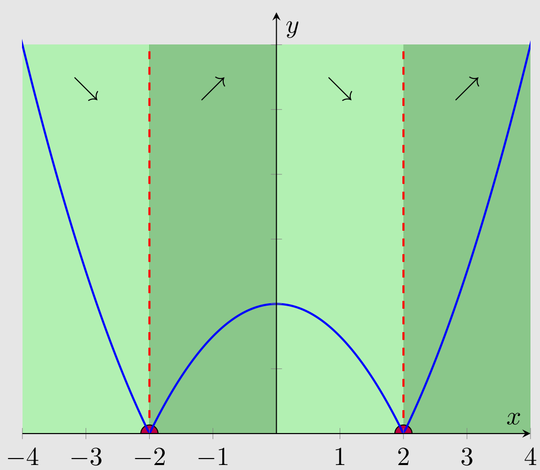

Figura 1: La función f.

b) (2,0 pts.) Considere la función $F\colon (1,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_1^x \ln((t \cdot x)^x)\, dt.$$

Demuestre que $F'(x) = (4x-1)\ln(x)$ para todo $x \in (1,+\infty)$.
Indicación: Comience desarrollando la expresión $\ln((t \cdot x)^x)$.

Solución:

Notemos primero que

$$\ln((t \cdot x)^x) = x\ln(t \cdot x) = x\ln(t) + x\ln(x),$$

por lo que

$$F(x) = x\int_1^x \ln(t)\,dt + \int_1^x x\ln(x)\,dt.$$

Usaremos esto para calcular $F'(x)$.

Primera forma (usando el teorema fundamental del cálculo):

Tenemos que

$$F(x) = x\int_1^x \ln(t)\,dt + \int_1^x x\ln(x)\,dt = x\int_1^x \ln(t)\,dt + (t \cdot x\ln(x))\Big|_1^x = x\int_1^x \ln(t)\,dt + x(x-1)\ln(x).$$

Usando el teorema fundamental del cálculo se obtiene que

$$\begin{aligned}
F'(x) &= (x') \cdot \int_1^x \ln(t)\,dt + x\left(\int_1^x \ln(t)\,dt\right)' + (x(x-1)\ln(x))' \\
&= \int_1^x \ln(t)\,dt + x\ln(x) + (2x-1)\ln(x) + \frac{1}{x} \cdot x(x-1) \\
&= (t\ln(t) - t)\Big|_1^x + x\ln(x) + (2x-1)\ln(x) + x - 1 \\
&= x\ln(x) - x - (\ln(1) - 1) + (3x-1)\ln(x) + x - 1 \\
&= (4x-1)\ln(x).
\end{aligned}$$

Segunda forma (integrando directamente):

Tenemos

$$\begin{aligned}
F(x) &= x\int_1^x \ln(t)\,dt + \int_1^x x\ln(x)\,dt \\
&= x(t\ln(t) - t)\Big|_1^x + (t \cdot x\ln(x))\Big|_1^x \\
&= x(x\ln(x) - x - 1 \cdot \ln(1) + 1) + x(x-1)\ln(x) \\
&= x((2x-1)\ln(x) - x + 1).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
F'(x) &= (x') \cdot ((2x-1)\ln(x) - x + 1) + x \cdot ((2x-1)\ln(x) - x + 1)' \\
&= ((2x-1)\ln(x) - x + 1) + x((2x-1)' \cdot \ln(x) + (2x-1)(\ln(x))' - 1) \\
&= ((2x-1)\ln(x) - x + 1) + x\left(2 \cdot \ln(x) + (2x-1)\frac{1}{x} - 1\right) \\
&= ((2x-1)\ln(x) - x + 1) + (2x \cdot \ln(x) + (2x-1) - x) \\
&= (4x-1)\ln(x).
\end{aligned}$$

P2. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2},$$

y la región $\mathcal{R}$ definida como el sector del plano comprendido entre f y el eje horizontal, entre los ceros de f.

a) (1,5 pts.) Demuestre que existen $A, B \in \mathbb{R}$ tales que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = A + \frac{B}{1+x^2}.$$

Solución:
Si imponemos que
$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = f(x) = A + \frac{B}{1+x^2} = \frac{A(1+x^2)+B}{1+x^2},$$
concluimos que $1-x^2 = A(1+x^2)+B = (A+B)+Ax^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Igualando coeficientes, obtenemos el sistema
$$\begin{aligned} A+B &= 1 \\ A &= -1 \end{aligned}$$
de donde resulta que $A=-1$ y $B=2$. Así,
$$f(x) = \frac{2}{1+x^2} - 1.$$
para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) (1,5 pts.) Calcule el área de la región $\mathcal{R}$.

Solución:
Notemos primero que f tiene ceros en $x=-1$ y en $x=1$. Por lo tanto, el área de $\mathcal{R}$ es
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx.$$
Por la parte anterior, vemos que
$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{1+x^2} - 1\right) dx \\ &= (2\arctan(x) - x)\Big|_{-1}^{1} \\ &= (2\arctan(1) - 1) - (2\arctan(-1) + 1) \\ &= \pi - 2. \end{aligned}$$

c) (3,0 pts.) Calcule el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar la región $\mathcal{R}$ con respecto al eje horizontal.
<u>Indicación:</u> Puede usar que $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan(x)\right) + C.$

Solución:
Usando la parte a), tenemos que el volumen es
$$\begin{aligned} \pi \int_{-1}^{1} [f(x)]^2\,dx &= \pi \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 dx \\ &= \pi \int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{1+x^2} - 1\right)^2 dx \\ &= \pi \int_{-1}^{1} \left(\frac{4}{(1+x^2)^2} - \frac{4}{1+x^2} + 1\right) dx \\ &= \pi \left(\frac{2x}{x^2+1} + 2\arctan(x) - 4\arctan(x) + x\right)\Bigg|_{-1}^{1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi\left(\frac{2x}{x^2+1} - 2\arctan(x) + x\right)\Bigg|_{-1}^{1} \\
&= \pi\left(\frac{2}{2} - 2\arctan(1) + 1 - \left(-\frac{2}{2} - 2\arctan(-1) - 1\right)\right) \\
&= \pi(4-\pi)
\end{aligned}
$$

P3. a) Considere la función $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt[3]{e^{-x}+1}}$ y la región

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0,\, 0 \leq y \leq f(x)\right\}.$$

i) (1,5 pts.) Exprese el área de la región $\mathcal{R}$ como una integral impropia y demuestre que es convergente, sin calcularla.

Solución:
Notemos que el área bajo la curva definida por f viene dada por

$$\text{área}(\mathcal{R}) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{e^{-x}+1}}\, dx,$$

que es una integral impropia de primera especie. Además, como f es continua en todo $\mathbb{R}$ al ser el cociente entre e^{-x} y $\sqrt[3]{e^{-x}+1}$ (que son continuas y no nulas en todo $\mathbb{R}$), es integrable en $[0,x]$ para cualquier $x > 0$.
Para ver que esta integral es convergente, podemos usar varios métodos:

Primera forma (criterio de comparación con e^{-x}): Tenemos que $e^{-x} > 0$, por lo que

$$0 \leq \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{e^{-x}+1}} \leq e^{-x}$$

para todo $x \geq 0$.
Además, se tiene que

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1 < \infty,$$

por lo que ambas integrales impropias convergen.

Segunda forma (criterio de comparación con x^α):
Tenemos que $e^{-x} > 0$, por lo que

$$0 \leq \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{e^{-x}+1}} \leq e^{-x}.$$

Además, notemos que, para cualquier $\alpha > 1$, se tiene que $x^\alpha e^{-x} \to 0$. Por lo tanto, existe $b > 0$

$$0 \leq \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{e^{-x}+1}} \leq e^{-x} \leq x^\alpha$$

para todo $x \geq b$.
Sabemos que la integral impropia

$$\int_b^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$

es convergente si $\alpha > 1$, por lo que la integral que estamos analizando también es convergente.

Tercera forma (criterio del cociente con e^{-x}): Tenemos que $e^{-x} > 0$, por lo que

$$\frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{e^{-x}+1}} \geq 0$$

para todo $x \geq 0$.
Además, se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{e^{-x}}{\sqrt[3]{e^{-x}+1}}}{\dfrac{1}{e^{-x}}} = \lim_{x\to\infty} e^x \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{e^{-x}+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{e^{-x}+1}} = 1 \neq 0$$

por lo que ambas integrales impropias convergen o ambas divergen.
Por otro lado, tenemos que

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1 < \infty,$$

por lo que ambas integrales impropias convergen.

ii) (1,5 pts.) Calcule el área de la región $\mathcal{R}$.

Solución:
Primera forma (integrar directamente): Tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{e^{-x}+1}}\,dx &= \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt[3]{e^{-t}+1}}\,dt \\
&= \lim_{x\to\infty} -\int_2^{1+e^{-x}} \frac{1}{\sqrt[3]{u}}\,du \\
&= \lim_{x\to\infty} \int_{1+e^{-x}}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{u}}\,du \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3}{2}u^{2/3}\right)\Big|_{1+e^{-x}}^{2} \\
&= \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4} - \lim_{x\to\infty}(1+e^{-x})^{2/3}\right) \\
&= \frac{3}{2}(\sqrt[3]{4}-1)
\end{aligned}$$

donde, en el segundo paso, usamos la sustitución

$$\begin{aligned}
u &= e^{-t}+1 \\
-du &= e^{-t}\,dt,
\end{aligned}$$

y en último paso utilizamos álgebra de límites.

Segunda forma (calcular una primitiva primero):
Calculemos una primitiva de f. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{e^{-x}+1}}\,dx &= -\int \frac{1}{\sqrt[3]{u}}\,du \\
&= -\frac{3}{2}u^{2/3} + C \\
&= -\frac{3}{2}(e^{-x}+1)^{2/3} + C,
\end{aligned}$$

donde, en el primer paso, usamos la sustitución

$$\begin{aligned}
u &= e^{-x}+1 \\
-du &= e^{-x}\,dx.
\end{aligned}$$

Así, pues,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{e^{-x}+1}}\,dx &= \lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt[3]{e^{-t}+1}}\,dt\\ &= \lim_{x\to\infty} -\left(\frac{3}{2}\left(e^{-t}+1\right)^{2/3}\Big|_0^x\right)\\ &= \lim_{x\to\infty} -\left(\frac{3}{2}\left(e^{-x}+1\right)^{2/3} - \frac{3}{2}\left(e^{0}+1\right)^{2/3}\right)\\ &= \frac{3}{2}(\sqrt[3]{4}-1)\end{aligned}$$

donde en último paso utilizamos álgebra de límites.

Luego, la integral es igual a $\frac{3}{2}(\sqrt[3]{4}-1)$. Por lo tanto,

$$\text{área}(\mathcal{R}) = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{4}-1).$$

b) Determine el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

i) (1,5 pts.) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$

Solución:
Primera forma (usando la fórmula para el radio de convergencia):
Calculemos $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ donde la serie es $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
Tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Así, el radio de convergencia es $R = \frac{1}{\rho} = 2$.

Segunda forma (usando el criterio de la raíz n-ésima):
Dada la forma de esta serie que estamos estudiando

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n},$$

podemos aplicar el criterio de la de la raíz n-ésima. En este caso, debemos estudiar el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{2}.$$

Recordemos que dicho criterio nos asegura convergencia cuando

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2} < 1,$$

donde en el último paso hemos usado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, el radio de convergencia es $R = 2$.

ii) (1,5 pts.) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$

Solución:
Primera forma (usando la fórmula para el radio de convergencia):
Calculemos $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ donde la serie es $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{(2n)!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}}.$$

Por otro lado, tenemos que $\sqrt[n]{(2n)!} \geq \sqrt[n]{n!}$. Usando la indicación, concluimos que

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0,$$

de donde $\rho = 0$.
Por lo tanto, el radio de convergencia de la serie es $R = \infty$.

Segunda forma (usando el criterio del cociente):
También podemos aplicar el criterio del cociente. En este caso, dado $x \in \mathbb{R}$, debemos estudiar el límite

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(2(n+1))!}}{\frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}(2n)!}{(-1)^n x^n (2n+2)!} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)\cdot x \cdot (2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{(2n+2)(2n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{4n^2+4n+1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos usado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2+4n+1} = 0.$$

Luego, como el límite obtenido es estrictamente menor que 1 para todo $x \in \mathbb{R}$, esta serie converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$, de donde el radio de convergencia es $R = \infty$.

Indicación: Recuerde que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Duración: 3h.

Formulario		
	Área entre una curva y el eje horizontal	$\int_a^b \lvert f(x)\rvert \, dx$
	Volumen de un sólido	$\int_a^b A(x)\, dx$
	Volumen de un sólido de revolución en torno al eje horizontal	$\pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$
	Volumen de un sólido de revolución en torno al eje vertical	$2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$
	Longitud de curva	$\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$
	Superficie de un manto de revolución	$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$
	Área en coordenadas polares	$\frac{1}{2}\int_a^b [f(\phi)]^2 \, d\phi$
	Centro de gravedad	$x_{\mathrm{G}} = \dfrac{\int_a^b x f(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx}$
		$y_{\mathrm{G}} = \dfrac{\frac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx}$