Pauta de corrección Control 5

P1. Sea (s_n) la sucesión definida por recurrencia como:

$s_0 = \alpha, \qquad s_1 = \beta, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_{n+1} = s_n \left(\frac{1+s_{n-1}+s_{n-1}^2}{3}\right)$, donde $\alpha, \beta \in (0,1)$.

a) **(3 pts)** Demuestre que $\forall n \geq 1,\; s_n, s_{n-1} \in (0,1)$.

Solución: Por inducción: Para $n=1$ se tiene que $s_n = \beta \in (0,1)$ y $s_{n-1} = \alpha \in (0,1)$. 0.5

Supongamos que $s_n, s_{n-1} \in (0,1)$, PDQ: $s_{n+1}, s_n \in (0,1)$. 0.5

Claramente $s_n \in (0,1)$ por hipótesis de inducción (directa). 0.5

Además (como $n \geq 1$):

$$s_{n+1} = s_n \left(\frac{1+s_{n-1}+s_{n-1}^2}{3}\right) > 0 \cdot \left(\frac{1+0+0^2}{3}\right) = 0.$$ 0.5

y

$$s_{n+1} = s_n \left(\frac{1+s_{n-1}+s_{n-1}^2}{3}\right) < 1 \cdot \left(\frac{1+1+1^2}{3}\right) = 1.$$ 1.0

b) **(3 pts)** Demuestre que (s_n) es convergente y calcule su límite.

Solución: Como $s_n \in (0,1)$, se tiene que $\forall n \geq 1$,

$$s_{n+1} = s_n \left(\frac{1+s_{n-1}+s_{n-1}^2}{3}\right) < s_n \cdot \left(\frac{1+1+1^2}{3}\right) = s_n.$$ 1.0

Por lo que (s_n) es decreciente. Como además es acotada inferiormente, es convergente. 0.5

Sea $\ell = \lim s_n$, entonces, tomando límite en la recurrencia se tiene que:

$$\ell = \ell \left(\frac{1+\ell+\ell^2}{3}\right).$$ 0.5

O sea, despejando:

$$\iff \quad 3\ell = \ell + \ell^2 + \ell^3 \iff \ell(\ell^2+\ell-2) = 0$$
$$\iff \quad \ell(\ell-1)(\ell+2) = 0 \iff \ell = 0 \;\vee\; \ell = 1 \;\vee\; \ell = -2.$$ 0.5

Como $s_n \in (0,1)$ es decreciente, su límite no puede ser ni 1 ni -2. Por lo tanto $\lim s_n = 0$. 0.5

P2. **a)** Calcule los siguientes límites (Justifique apropiadamente sus respuestas)

i) **(1.5 pts)** $\lim \sqrt[n]{4^n + n^5}$

Solución: Para usar sandwich, por un lado tenemos que si $n \geq 1$:

$$\sqrt[n]{4^n + n^5} \leq \sqrt[n]{4^n n^5 + 4^n n^5} = 4\sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n^5}.$$ 0.5

Por otro

$$\sqrt[n]{4^n + n^5} \geq \sqrt[n]{4^n} = 4.$$ 0.2

Luego

$$4 \leq \sqrt[n]{4^n + n^5} \leq 4 \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\to 1} \underbrace{\sqrt[n]{n^5}}_{\to 1}$$ 0.5

de donde $\lim \sqrt[n]{4^n + n^5} = 4$ 0.3

ii) **(1.5 pts)** $\lim \left(\frac{n^3}{2n^2+1} - \frac{n^2}{2n+1}\right)^{1/n}$

Solución: Claramente

$$\left(\frac{n^3}{2n^2+1} - \frac{n^2}{2n+1}\right)^{1/n} = \left(\frac{n^2(n-1)}{(2n+1)(2n^2+1)}\right)^{1/n}$$ 0.5

Es decir, el límite es de la forma $\sqrt[n]{q_n}$ donde

$$q_n = \frac{n^2(n-1)}{(2n+1)(2n^2+1)} \to \frac{1}{4}.$$ 0.5

Luego, como $\frac{1}{4} \in (\cancel{-1,1})$ (0,1), por teorema del apunte, $\sqrt[n]{q_n} \to 1$ 0.5

b) **(3 pts)** Demuestre que si (q_n) es una sucesión que converge a $\frac{1}{2}$ entonces $n^k q_n^n \to 0$ para cualquier $k \in \mathbb{N}^*$.
Use lo anterior para calcular los límites $\lim h_n$ y $\lim(n \cdot h_n)$, donde (h_n) es la sucesión definida por $h_n = n^4 \left(\frac{n-1}{2n-1}\right)^n$.

Solución: Por definición de límite, si $q_n \to \frac{1}{2}$ (tomando $\varepsilon = \frac{1}{4}$), se tiene que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0, \qquad \frac{1}{4} \leq q_n \leq \frac{3}{4}.$$ 0.5

Elevando a la potencia n y multiplicando por n^k queda que

$$\forall n \geq n_0, \qquad n^k \left(\tfrac{1}{4}\right)^n \leq n^k q_n^n \leq n^k \left(\tfrac{3}{4}\right)^n. \qquad (*)$$ 0.5

Pero sabemos (ver apunte) que $n^k q^n \to 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $q \in (-1, 1)$. Por lo tanto

$$n^k \left(\tfrac{1}{4}\right)^n \to 0 \quad n^k \left(\tfrac{3}{4}\right)^n \to 0.$$ 0.5

El resultado pedido es consecuencia directa de lo anterior y aplicar Sandwich en $(*)$. 0.0

La sucesión $h_n = n^4 \left(\frac{n-1}{2n-1}\right)^n$ es un caso concreto donde $q_n = \frac{n-1}{2n-1} \to \frac{1}{2}$. 0.5
Por lo tanto, se tiene que

$$h_n = n^4 q_n^n \to 0 \qquad (k = 4).$$ 0.5

$$n \cdot h_n = n^5 q_n^n \to 0 \qquad (k = 5).$$ 0.5