Control 3

P1. a) (3,0 pts.) Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Se define

$$F(x) = \int_1^x \left(t \int_1^t f(s)\, ds \right) dt.$$

Calcule $F'(1)$ y $F''(1)$.

Solución: Por el teorema fundamental del cálculo, tenemos que

$$F'(x) = x \int_1^x f(s)ds,$$

(1.2 pts. por encontrar $F'(x)$ usando el teorema fundamental del cálculo)

de donde vemos que

$$F'(1) = 1 \cdot \int_1^1 f(s)ds = 0.$$

(0.3 pts. por calcular $F'(1)$)

Derivando nuevamente,

$$F''(x) = \int_1^x f(s)ds + x \left(\int_1^x f(s)ds \right)' \qquad \textbf{(0.6 pts. por usar la regla del producto)}$$

$$= \int_1^x f(s)ds + xf(x),$$

(0.6 pts. por encontrar $F''(x)$ usando el teorema fundamental del cálculo)

de donde obtenemos que

$$F''(1) = \int_1^1 f(s)ds + 1 \cdot f(1) = f(1).$$

(0.3 pts. por encontrar $F''(1)$)

b) (3,0 pts.) Considere $a, b \in \mathbb{R}$, con $0 < a < b$, y la parábola $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -(x-a)(x-b)$. Considere el triángulo que se forma por el eje horizontal y las líneas que unen el vértice $V = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{(b-a)^2}{4}\right)$ de la parábola con $(a, 0)$ y con $(b, 0)$ (vea la Figura 1). Demuestre que la razón entre el área de la parábola y el área del triángulo es $4/3$.

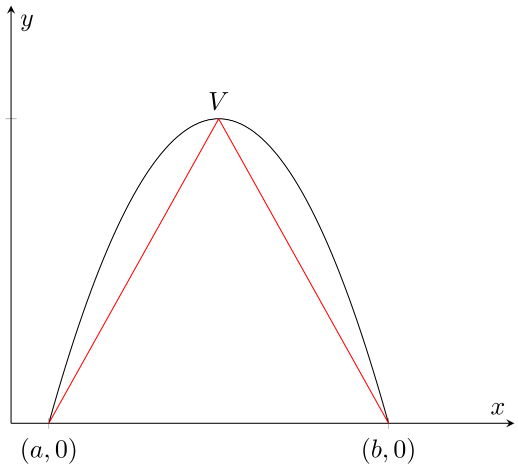


Figura 1: La función $f(x) = -(x-a)(x-b)$ y el triángulo definido por los puntos $(a, 0)$, $(b, 0)$ y V.

Indicación: El área del triángulo puede calcularse sin necesidad de integrar.

Solución: Comenzamos calculando el área $A_{\text{parábola}}$ entre la parábola y el eje horizontal. Como f es no negativa en $[a, b]$ tenemos que

$$\begin{aligned}
A_{\text{parábola}} &= \int_a^b -(x-a)(x-b)dx \qquad \textbf{(0.5 pts. por expresar el área como una integral)} \\
&= -\int_a^b (x^2 - (a+b)x + ab)dx \\
&= -\left(\frac{x^3}{3} - (a+b)\frac{x^2}{2} + abx\right)\Bigg|_a^b \qquad \textbf{(0.5 pts por encontrar una primitiva)} \\
&= -\frac{b^3 - a^3}{3} + (a+b)\frac{b^2 - a^2}{2} - ab(b-a) \\
&\qquad \textbf{(0.5 pts. por realizar la evaluación de los límites)} \\
&= -(b-a)\frac{a^2 + ab + b^2}{3} + (b-a)\frac{(a+b)^2}{2} - (b-a)ab \\
&= (b-a)\left(-\frac{a^2 + ab + b^2}{3} + \frac{(a+b)^2}{2} - ab\right) \\
&= \frac{(b-a)}{6}(-2a^2 - 2ab - 2b^2 + 3(a+b)^2 - 6ab) \\
&= \frac{(b-a)}{6}(-2a^2 - 2ab - 2b^2 + 3a^2 + 6ab + 3b^2 - 6ab) \\
&= \frac{(b-a)}{6}(a^2 - 2ab + b^2) \\
&= \frac{(b-a)}{6}(b-a)^2 \\
&= \frac{(b-a)^3}{6}. \qquad \textbf{(0.5 pts. por calcular la integral)}
\end{aligned}$$

Por otro lado, el triángulo tiene base $b - a$ y altura la coordenada vertical V. De esta forma

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2}(b-a)\frac{(b-a)^2}{4} = \frac{(b-a)^3}{8}.$$

(0.5 pts. por calcular el área del triángulo)

De esta forma, obtenemos que

$$\frac{A_{\text{parábola}}}{A_{\text{triángulo}}} = \frac{\frac{(b-a)^3}{6}}{\frac{(b-a)^3}{8}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

(0.5 pts. por concluir)

P2. a) (3,0 pts.) Calcule la longitud de la curva definida por $f(x) = -\ln(\cos(x))$ en el intervalo $[0, \pi/4]$.

Solución: La longitud de curva se calcula como

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

por lo que comenzamos calculando $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$. Tenemos que

$$f'(x) = -\frac{1}{\cos(x)}(-\sin(x)) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x).$$

(0.5 pts. por calcular $f'(x)$)

Así,

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \tan^2(x) = \sec^2(x),$$

de donde

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{\sec^2(x)} = |\sec(x)|.$$

Como $x \in [0, \pi/4]$, $\sec(x)$ es positiva, por lo que la última expresión es igual a $\sec(x)$.

(1.0 pto. por calcular $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$)

La longitud de la curva entonces es

$$\int_0^{\pi/4} \sec(x)dx = \ln(\tan(x) + \sec(x))\Big|_0^{\pi/4}$$

(0.5 pts. por encontrar una primitiva)

$$= \ln(\tan(\pi/4) + \sec(\pi/4)) - \ln(\tan(0) + \sec(0))$$

(0.5 pts. por realizar la evaluación de los límites)

$$= \ln(1 + \sqrt{2}) - \ln(0 + 1)$$
$$= \ln(1 + \sqrt{2}) - \ln(1)$$
$$= \ln(1 + \sqrt{2}).$$

(0.5 pts. por calcular la longitud)

b) (3,0 pts.) Un *elipsoide* es un cuerpo geométrico obtenido al rotar una elipse respecto a su eje mayor. Calcule el volumen de un elipsoide obtenido al rotar una elipse de semiejes a y b con $0 < b < a$.

Indicación: Recuerde que la ecuación de una elipse de semiejes a y b y centro $(0,0)$ (alineada con los ejes coordenados) es

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Solución: De la ecuación de la elipse, deducimos que

$$y = \pm b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

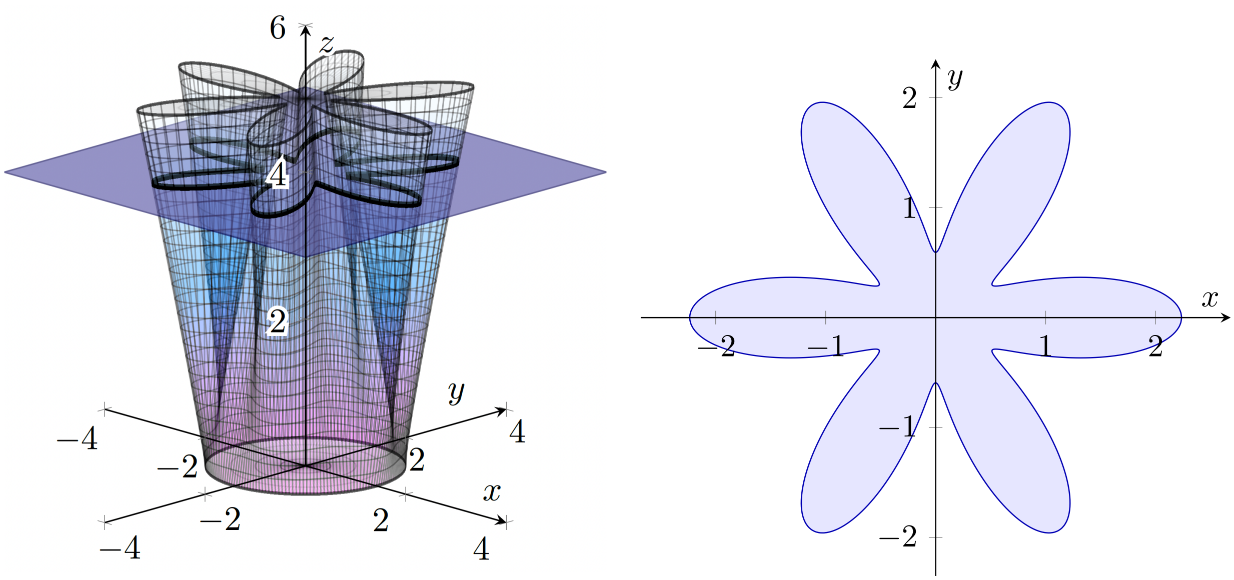
Definimos así la función no negativa $f(x) = b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$ en el intervalo $[-a, a]$.

(1.0 pto. por considerar la función y el intervalo correctos.)

El volumen del sólido de revolución definido por esta función es

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-a}^{a} \left[b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} \right]^2 dx && \textbf{(0.5 pts. por expresar el volumen como una integral)} \\
&= \pi \int_{-a}^{a} b^2 \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) dx \\
&= \pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a} && \textbf{(0.5 pts. por encontrar una primitiva)} \\
&= \pi b^2 \left(a - \frac{a^3}{3a^2} - \left(-a - \frac{(-a)^3}{3a^2}\right)\right) && \textbf{(0.5 pts. por realizar la evaluación de los límites)} \\
&= \pi b^2 \left(a - \frac{a}{3} - \left(-a + \frac{a}{3}\right)\right) \\
&= \pi b^2 \left(2a - \frac{2a}{3}\right) \\
&= \frac{4}{3}\pi a b^2. && \textbf{(0.5 pts. por calcular la integral)}
\end{aligned}$$

P3. Considere el sólido C en el espacio limitado en el eje vertical por los planos $z = 0$ y $z = 5$, y tal que el corte transversal a C por el plano $z = z_0$, para $0 \leq z_0 \leq 5$, consiste en la región encerrada por la curva definida en coordenadas polares por $r = \sqrt{2} + 2\sinh\left(\frac{z_0}{10}\right)\cos(6\phi)$ en el plano $z = z_0$ (vea la Figura 2).



(a) Sólido C y el plano $z_0 = 4$.

(b) Corte transversal por el plano $z_0 = 4$.

Figura 2

a) (3,0 pts.) Demuestre que el área transversal del corte de C por el plano $z = z_0$ es $A(z_0) = 2\pi\cosh^2\left(\frac{z_0}{10}\right)$.

Solución: Como la curva está definida en coordenadas polares, su área se calcula como

$$A(z_0) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\sqrt{2} + 2\sinh\left(\frac{z_0}{10}\right)\cos(6\phi)\right]^2 d\phi$$

(1.0 pto. por expresar el área transversal como una una integral)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[2 + 4\sqrt{2}\sinh\left(\frac{z_0}{10}\right)\cos(6\phi) + 4\sinh^2\left(\frac{z_0}{10}\right)\cos^2(6\phi)\right] d\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[2 + 4\sqrt{2}\sinh\left(\frac{z_0}{10}\right)\cos(6\phi) + 4\sinh^2\left(\frac{z_0}{10}\right)\frac{1+\cos(12\phi)}{2}\right] d\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[2 + 4\sqrt{2}\sinh\left(\frac{z_0}{10}\right)\cos(6\phi) + 2\sinh^2\left(\frac{z_0}{10}\right)(1+\cos(12\phi))\right] d\phi \\
&= \frac{1}{2}\left(2\phi + \frac{4\sqrt{2}}{6}\sinh\left(\frac{z_0}{10}\right)\sin(6\phi) + 2\sinh^2\left(\frac{z_0}{10}\right)\left(\phi + \frac{\sin(12\phi)}{12}\right)\right)\Bigg|_0^{2\pi}
\end{aligned}
$$

(1.0 pto. por encontrar una primitiva)

$$= \frac{1}{2}\left(2\cdot 2\pi + 2\sinh^2\left(\frac{z_0}{10}\right)\cdot 2\pi\right)$$ **(0.5 pts. por realizar la evaluación de los límites)**

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi\left(1 + \sinh^2\left(\frac{z_0}{10}\right)\right) \\
&= 2\pi\cosh^2\left(\frac{z_0}{10}\right).
\end{aligned}
$$

(0.5 pts. por calcular la integral)

b) (3,0 pts) Calcule el volumen de C.

Solución: El volumen de C se calcula integrando su área transversal, que, por la parte anterior, es $A(z_0) = 2\pi\cosh^2\left(\frac{z_0}{10}\right)$. Así, el volumen es

$$\int_0^5 2\pi\cosh^2\left(\frac{z}{10}\right) dz = 2\pi\int_0^5 \cosh^2\left(\frac{z}{10}\right) dz$$

(1.0 pto. por expresar el volumen como una una integral)

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi\int_0^5 \frac{1+\cosh\left(\frac{z}{5}\right)}{2} dz \\
&= \pi\int_0^5 \left(1 + \cosh\left(\frac{z}{5}\right)\right) dz \\
&= \pi\left(z + 5\sinh\left(\frac{z}{5}\right)\right)\Bigg|_0^5
\end{aligned}
$$

(1.0 pto. por encontrar una primitiva)

$$= \pi(5 + 5\sinh(1))$$ **(0.5 pts. por realizar la evaluación de los límites)**

$$= 5\pi(1 + \sinh(1)).$$ **(0.5 pts. por calcular la integral)**

Indicación: Recuerde que, para todo $u \in \mathbb{R}$,

$$\sinh(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2}; \qquad \cosh(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}; \qquad 1 + \sinh^2(u) = \cosh^2(u) = \frac{1+\cosh(2u)}{2}.$$

Formulario		
	Área entre una curva y el eje horizontal	$\int_a^b \lvert f(x)\rvert dx$
	Volumen de un sólido	$\int_a^b A(x)dx$
	Volumen de un sólido de revolución en torno al eje horizontal	$\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$
	Volumen de un sólido de revolución en torno al eje vertical	$2\pi \int_a^b xf(x)dx$
	Longitud de curva	$\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$
	Superficie de un manto de revolución	$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$
	Área en coordenadas polares	$\frac{1}{2}\int_a^b [f(\phi)]^2 d\phi$

Duración: 3h.