Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Cálculo Diferencial e Integral MA1002-2023-1

Control 3

P1. a) (3,0 pts.) Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Se define

$$F(x) = \int_1^x \left(t \int_1^t f(s)\, ds \right) dt.$$

Calcule $F'(1)$ y $F''(1)$.

b) (3,0 pts.) Considere $a, b \in \mathbb{R}$, con $0 < a < b$, y la parábola $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -(x-a)(x-b)$. Considere el triángulo que se forma por el eje horizontal y las líneas que unen el vértice $V = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{(b-a)^2}{4}\right)$ de la parábola con $(a,0)$ y con $(b,0)$ (vea la Figura 1). Demuestre que la razón entre el área de la parábola y el área del triángulo es $4/3$.

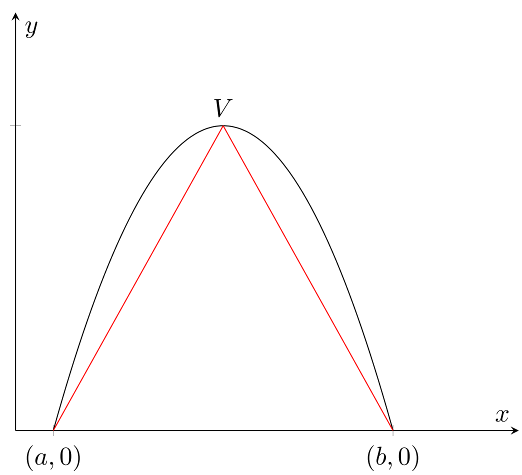


Figura 1: La función $f(x) = -(x-a)(x-b)$ y el triángulo definido por los puntos $(a,0)$, $(b,0)$ y V.

Indicación: El área del triángulo puede calcularse sin necesidad de integrar.

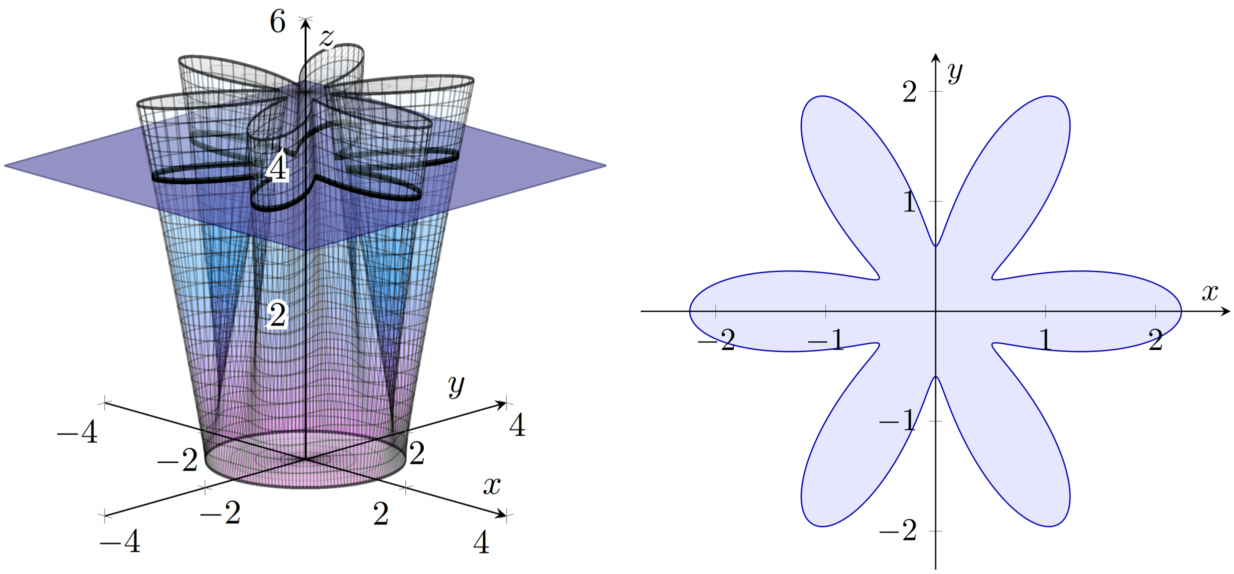
P2. a) (3,0 pts.) Calcule la longitud de la curva definida por $f(x) = -\ln(\cos(x))$ en el intervalo $[0, \pi/4]$.

b) (3,0 pts.) Un *elipsoide* es un cuerpo geométrico obtenido al rotar una elipse respecto a su eje mayor. Calcule el volumen de un elipsoide obtenido al rotar una elipse de semiejes a y b con $0 < b < a$.

Indicación: Recuerde que la ecuación de una elipse de semiejes a y b y centro $(0,0)$ (alineada con los ejes coordenados) es

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

P3. Considere el sólido C en el espacio limitado en el eje vertical por los planos $z = 0$ y $z = 5$, y tal que el corte transversal a C por el plano $z = z_0$, para $0 \leq z_0 \leq 5$, consiste en la región encerrada por la curva definida en coordenadas polares por $r = \sqrt{2} + 2\sinh\left(\frac{z_0}{10}\right)\cos(6\phi)$ en el plano $z = z_0$ (vea la Figura 2).



(a) Sólido C y el plano $z_0 = 4$.

(b) Corte transversal por el plano $z_0 = 4$.

Figura 2

a) (3,0 pts.) Demuestre que el área transversal del corte de C por el plano $z = z_0$ es $A(z_0) = 2\pi\cosh^2\left(\frac{z_0}{10}\right)$.

b) (3,0 pts) Calcule el volumen de C.

Indicación: Recuerde que, para todo $u \in \mathbb{R}$,

$$\sinh(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2}; \qquad \cosh(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}; \qquad 1 + \sinh^2(u) = \cosh^2(u) = \frac{1 + \cosh(2u)}{2}.$$

Formulario	Área entre una curva y el eje horizontal	$\int_a^b \lvert f(x) \rvert dx$
	Volumen de un sólido	$\int_a^b A(x)dx$
	Volumen de un sólido de revolución en torno al eje horizontal	$\pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$
	Volumen de un sólido de revolución en torno al eje vertical	$2\pi\int_a^b xf(x)dx$
	Longitud de curva	$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$
	Superficie de un manto de revolución	$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$
	Área en coordenadas polares	$\frac{1}{2}\int_a^b [f(\phi)]^2 d\phi$

Duración: 3h.