Control 2

P1. Calcule dos de las siguientes primitivas:

a) (3,0 pts.)

$$\int e^x \sqrt{1+e^{2x}}\, dx$$

Solución:
Usamos la sustitución

$$s = e^x, \qquad ds = e^x dx.$$

Reemplazando, la primitiva queda

$$\int e^x \sqrt{1+e^{2x}}\, dx = \int \sqrt{1+s^2}\, ds.$$

(0,6 pts. por hacer la sustitución)

Ahora, hacemos la sustitución trigonométrica

$$s = \tan(\theta), \qquad ds = \sec^2(\theta) d\theta.$$

Como $1 + s^2 = 1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$, obtenemos

$$\int \sqrt{1+s^2}\, ds = \int \sec^3(\theta)\, d\theta.$$

(0,6 pts. por hacer la sustitución)

Primera forma para calcular la primitiva (integrando por partes):
Sea

$$I = \int \sec^3(\theta)\, d\theta.$$

Integramos por partes con

$$\begin{aligned} u &= \sec(\theta), & dv &= \sec^2(v) d\theta, \\ du &= \sec(\theta)\tan(\theta) d\theta, & v &= \tan(\theta). \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} I &= \int \sec(\theta)\sec^2(\theta)\, d\theta \\ &= \sec(\theta)\tan(\theta) - \int \sec(\theta)\tan^2(\theta)\, d\theta \qquad \textbf{(0,6 pts. por hacer la integración por partes)} \\ &= \sec(\theta)\tan(\theta) - \int \sec(\theta)(\sec^2(\theta) - 1)\, d\theta \\ &= \sec(\theta)\tan(\theta) - \int \sec^3(\theta)\, d\theta + \int \sec(\theta)\, d\theta \end{aligned}$$

$$= \sec(\theta)\tan(\theta) - I + \ln|\sec(\theta) + \tan(\theta)| + C.$$

Despejando I, se obtiene

$$I = \frac{1}{2}\left(\sec(\theta)\tan(\theta) + \ln|\sec(\theta) + \tan(\theta)|\right) + C.$$

(0,6 pts. por encontrar I)

Como $s^2 + 1 = \tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)$, tenemos que $\sec(\theta) = \sqrt{s^2+1}$. Así,

$$I = \frac{1}{2}\left(s\sqrt{s^2+1} + \ln|\sqrt{s^2+1} + s|\right) + C.$$

Reemplazando $s = e^x$, se obtiene

$$\int e^x\sqrt{1+e^{2x}}\,dx = \frac{1}{2}\left(e^x\sqrt{e^{2x}+1} + \ln|\sqrt{e^{2x}+1} + e^x|\right) + C.$$

(0,6 pts. por dejar la primitiva en términos de la variable original)

Segunda forma para calcular la primitiva (con la sustitución de Weierstrass):
Podemos reducir la primitiva a un cociente de polinomios usando la sustitución $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
Sabemos que con esta sustitución se tiene que

$$\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad d\theta = \frac{2dt}{1+t^2},$$

de donde

$$\sec^3(\theta) = \left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)^3$$

y así

$$\int \sec^3(\theta)\,d\theta = \int \frac{2(1+t^2)^2}{(1-t^2)^3}\,dt.$$

(0,6 pts. por hacer la sustitución)

Para resolver esta primitiva usamos fracciones parciales. Tenemos que encontrar A, B, C, D, E, F tales que

$$\frac{2(1+t^2)^2}{(1-t^2)^3} = \frac{A}{(1-t)} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{C}{(1-t)^3} + \frac{D}{(1+t)} + \frac{E}{(1+t)^2} + \frac{F}{(1+t)^3}. \tag{1}$$

Primero, notemos que

$$\frac{2(1+t^2)^2}{(1-t^2)^3} = \frac{2+4t^2+2t^4}{(1-t^2)^3}.$$

Juntando todas las expresiones del lado derecho y cancelando el denominador en (1), obtenemos

$$\begin{aligned} &2 + 4t^2 + 2t^4 \\ &= A(1-t)^2(1+t)^3 + B(1-t)(1+t)^3 + C(1+t)^3 + D(1-t)^3(1+t)^2 + E(1-t)^3(1+t) + F(1-t)^3 \end{aligned}$$

Evaluando en $t = 1$, resulta

$$8 = 8C \implies C = 1,$$

y evaluando en $t = -1$ obtenemos

$$8 = 8F \implies F = 1.$$

Expandiendo el lado derecho de (1) e igualando coeficientes resulta que

$$\begin{aligned} A+B+D+E+2 &= 2 \\ A+2B-D-2E &= 0 \\ 6-2A-2D &= 4 \\ -2A-2B+2D+2E &= 0 \\ A-B+D-E &= 2 \\ A-D &= 0. \end{aligned}$$

(0,3 pts. por determinar las ecuaciones)

De la tercera y última ecuación vemos inmediatamente que $A = \frac{1}{2}$ y $D = \frac{1}{2}$. Finalmente, las primeras dos ecuaciones se reducen a

$$\begin{aligned} B+E+3 &= 2 \\ 2B-2E &= 0, \end{aligned}$$

de donde obtenemos que $B = -\frac{1}{2}$ y que $E = -\frac{1}{2}$.
Concluimos entonces que

$$\frac{2(1+t^2)^2}{(1-t^2)^3} = \frac{1}{2(1-t)} - \frac{1}{2(1-t)^2} + \frac{1}{(1-t)^3} + \frac{1}{2(1+t)} - \frac{1}{2(1+t)^2} + \frac{1}{(1+t)^3}.$$

(0,3 pts. por encontrar las fracciones parciales)

Ahora,

$$\begin{aligned} &\int \frac{2(1+t^2)^2}{(1-t^2)^3}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1-t)^2}\,dt + \int \frac{1}{(1-t)^3}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+t)^2}\,dt + \int \frac{1}{(1+t)^3}\,dt \\ &= -\frac{1}{2}\ln|1-t| - \frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1-t)^2} + \frac{1}{2}\ln|1+t| + \frac{1}{2(1+t)} - \frac{1}{2(1+t)^2} + C \\ &= \frac{t(1+t^2)}{(1-t^2)^2} + \frac{1}{2}\ln|1+t| - \frac{1}{2}\ln|1-t| + C. \end{aligned}$$

(0,3 pts. por calcular la primitiva de cada término de las fracciones parciales)

Volviendo a $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ y usando que

$$\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \operatorname{sen}(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}$$

vemos que

$$\frac{t(1+t^2)}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{1}{2}\tan(\theta)\sec(\theta).$$

Así,

$$\int \sec^3(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\left[\tan(\theta)\sec(\theta) + \ln\left|1+\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| - \ln\left|1-\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\right] + C.$$

Ahora, usando que $\theta = \arctan(s)$ y que $\sec(\arctan(s)) = \sqrt{1+s^2}$ obtenemos

$$\int \sqrt{1+s^2}\,ds = \frac{1}{2}\left[s\sqrt{1+s^2} + \ln\left|1+\tan\left(\frac{\arctan(s)}{2}\right)\right| - \ln\left|1-\tan\left(\frac{\arctan(s)}{2}\right)\right|\right] + C.$$

Volviendo a la variable original, concluimos finalmente que

$$\int e^x \sqrt{1+e^{2x}}\, dx = \frac{1}{2}\left[e^x\sqrt{1+e^{2x}} + \ln\left|1+\tan\left(\frac{\arctan(e^x)}{2}\right)\right| - \ln\left|1-\tan\left(\frac{\arctan(e^x)}{2}\right)\right|\right] + C.$$

(0,3 pts. por dejar la primitiva en términos de la variable original)

Tercera forma para calcular la primitiva (con otra sustitución trigonométrica):
Notemos que

$$\sec^3(\theta) = \frac{1}{\cos^3(\theta)} = \frac{\cos(\theta)}{\cos^4(\theta)} = \frac{\cos(\theta)}{(1-\operatorname{sen}^2(\theta))^2}$$

por lo que usando la sustitución

$$t = \operatorname{sen}(\theta) \qquad\qquad dt = \cos(\theta)d\theta$$

la primitiva queda

$$\int \sec^3(\theta)\, d\theta = \int \frac{1}{(1-t^2)^2}\, dt.$$

(0,6 pts. por hacer la sustitución)

Calcularemos esta integral usando fracciones parciales. Tenemos que encontrar A, B, C, D tales que

$$\frac{1}{(1-t^2)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{C}{1+t} + \frac{D}{(1+t)^2}$$

De aquí obtenemos que

$$1 = A(1-t)(1+t)^2 + B(1+t)^2 + C(1-t)^2(1+t) + D(1-t)^2. \tag{2}$$

Evaluando en $t=1$, resulta que

$$1 = 4B \implies B = \frac{1}{4}$$

y, evaluando en $t=-1$, resulta que

$$1 = 4D \implies D = \frac{1}{4}.$$

Reemplazando en (2), expandiendo e igualando coeficientes, obtenemos

$$\begin{aligned} A + D + \frac{1}{2} &= 1 \\ A - 2D + \frac{1}{4} &= 0 \\ -A + D &= 0 \\ -A + \frac{1}{4} &= 0 \end{aligned}$$

de donde resulta que $A = \frac{1}{4}$ y que $D = \frac{1}{4}$.

(0,3 pts. por determinar las ecuaciones y los valores de las constantes)

Luego,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1-t^2)^2} &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{1-t}\, dt + \frac{1}{4}\int \frac{1}{(1-t)^2}\, dt + \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+t}\, dt + \frac{1}{4}\int \frac{1}{(1+t)^2}\, dt \\ &= -\frac{1}{4}\ln|1-t| + \frac{1}{4(1-t)} + \frac{1}{4}\ln|1+t| - \frac{1}{4(1+t)} + C \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\ln|1+t| - \frac{1}{4}\ln|1-t| + \frac{t}{2(1-t^2)} + C$$
$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{t}{2(1-t^2)} + C.$$

(0,3 pts. por encontrar las fracciones parciales y calcular la primitiva de cada término de las fracciones parciales)

Volviendo a que $t = \operatorname{sen}(\theta)$, tenemos que $1 - t^2 = 1 - \operatorname{sen}^2(\theta) = \cos^2(\theta)$, de donde

$$\frac{t}{2(1-t^2)} = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \tan(\theta)\sec(\theta).$$

Además,

$$\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| = \ln\left|\frac{1+\operatorname{sen}(\theta)}{1-\operatorname{sen}(\theta)}\right| = \ln\left|\frac{(1+\operatorname{sen}(\theta))^2}{1-\operatorname{sen}^2(\theta)}\right|$$
$$= \ln\left|\left(\frac{1+\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}\right)^2\right| = 2\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}\right| = 2\ln|\sec(\theta)+\tan(\theta)|.$$

Concluimos que

$$\int \sec^3(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}(\ln|\sec(\theta)+\tan(\theta)| + \tan(\theta)\sec(\theta)) + C.$$

(0,3 pts. por encontrar la primitiva)

Recordando que $s = \tan(\theta)$, tenemos que $\sec(\theta) = \sqrt{s^2+1}$. Así,

$$\int \sqrt{1+s^2}\,ds = \frac{1}{2}(s\sqrt{1+s^2} + \ln|\sqrt{1+s^2}+s|) + C.$$

Finalmente, como $s = e^x$, obtenemos

$$\int e^x\sqrt{1+e^{2x}}\,dx = \frac{1}{2}(e^x\sqrt{1+e^{2x}} + \ln|\sqrt{1+e^{2x}}+e^x|) + C.$$

(0,3 pts. por dejar la primitiva en términos de la variable original)

b) (3,0 pts.)

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx$$

Solución:

Comenzamos haciendo fracciones parciales. Tenemos que la factorización en los reales de $x^3 + 4x$ es $x(x^2+4)$, de donde hay que encontrar A, B, C tales que

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}.$$

(0,5 pts. por enunciar las fracciones parciales)

Primera forma para calcular las fracciones parciales (igualando coeficientes):

Juntando las dos expresiones del lado derecho y expandiendo, obtenemos

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{(A+B)x^2 + Cx + 4A}{x^3 + 4x}$$

Esto implica que $2x^2 - x + 4 = (A+B)x^2 + Cx + 4A$. Igualando coeficientes obtenemos que

$$\begin{aligned} A + B &= 2 \\ C &= -1 \\ 4A &= 4, \end{aligned}$$

de donde resulta que $A = 1$, $C = -1$ y $B = 1$. Así,

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4}.$$

(1,5 pts. por encontrar las fracciones parciales)

Volviendo a la primitiva original:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4}\right) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+4} - \frac{1}{x^2+4}\right) dx \\ &= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

(1,0 pto. calcular la primitiva de cada término de las fracciones parciales)

Segunda forma para calcular las fracciones parciales (evaluando):
Juntando las dos expresiones del lado derecho, obtenemos

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{A(x^2+4) + (Bx+C)x}{x^3+4x}$$

Esto implica que $2x^2 - x + 4 = A(x^2+4) + (Bx+C)x$. Podemos evaluar en distintos puntos para obtener varias ecuaciones:

$$\begin{aligned} x = 0 &\implies 4 = 4A \implies A = 4 \\ x = 2i &\implies -4 - 2i = (2Bi + C)2i = -4B + 2Ci \end{aligned}$$

Tomando parte real e imaginaria en la última ecuación, resulta

$$\begin{aligned} -4 = -4B &\implies B = 1 \\ -2 = 2C &\implies C = -1 \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4}.$$

(1,5 pts. por encontrar las fracciones parciales)

Volviendo a la primitiva original:

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4}\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+4} - \frac{1}{x^2+4} \right) dx$$
$$= \int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{x}{x^2+4}\, dx - \int \frac{1}{x^2+4}\, dx$$
$$= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

(1,0 pto. calcular la primitiva de cada término de las fracciones parciales)

c) (3,0 pts.)

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}(x) + \cos(x) + 1}\, dx$$

Solución:
Usemos el cambio de variable de Weierstrass $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Sabemos que con este cambio de variable se tiene que

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

(1,0 pto. por enunciar el cambio de variable)

Reemplazando, la primitiva queda

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)+1}\, dx = \int \left(\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} \right) \left(\frac{2}{1+t^2} \right) dt$$
$$= 2\int \frac{1}{2t + 1 - t^2 + 1 + t^2}\, dt$$
$$= 2\int \frac{1}{2t+2}\, dt$$
$$= \int \frac{1}{t+1}\, dt$$

(1,0 pto. por hacer la sustitución)

$$= \ln|t+1| + C$$

(0,5 pts. por calcular la primitiva)

$$= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right| + C.$$

(0,5 pts. por dejar la primitiva en términos de la variable original)

d) (3,0 pts.)

$$\int x^3 \ln^2(x)\, dx$$

Solución: Procedamos mediante integración por partes. En este caso consideramos

$$u = \ln^2(x), \qquad dv = x^3\, dx,$$
$$du = 2\ln(x)\frac{1}{x}\, dx, \qquad v = \frac{x^4}{4}.$$

Luego,

$$\int x^3 \ln^2(x)\, dx = \frac{x^4}{4}\ln^2(x) - \frac{1}{2}\int x^3 \ln(x)\, dx. \tag{3}$$

(1,0 pto. por escribir la integración por partes)

Análogamente, para calcular

$$\int x^3 \ln(x)\, dx$$

volvemos a usar integración por partes. En este caso

$$u = \ln(x), \qquad dv = x^3\,dx,$$
$$du = \frac{1}{x}\,dx, \qquad v = \frac{x^4}{4}.$$

Así,

$$\int x^3 \ln(x)\,dx = \frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{1}{4}\int x^3\,dx. \tag{4}$$

(1,0 pto. por escribir la integración por partes)

Incorporando (4) en (3), obtenemos que

$$\begin{aligned}\int x^3 \ln^2(x)\,dx &= \frac{x^4}{4}\ln^2(x) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{1}{4}\int x^3\,dx\right] \\ &= \frac{x^4}{4}\ln^2(x) - \frac{x^4}{8}\ln(x) + \frac{1}{8}\int x^3\,dx.\end{aligned}$$

(0,5 pts. por reemplazar)

Esto es

$$\int x^3 \ln^2(x)\,dx = \frac{x^4}{4}\ln^2(x) - \frac{x^4}{8}\ln(x) + \frac{x^4}{32} + C.$$

(0,5 pts. por calcular la primitiva)

e) (3,0 pts.)

$$\int \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x}\,dx$$

Solución:

Primera forma (usando una sustitución trigonométrica):

En este caso no tenemos precisamente la expresión $\sqrt{x^2-a^2}$, pero observemos que

$$\sqrt{4x^2-9} = \sqrt{(2x)^2-3^2} = \sqrt{u^2-3^2},$$

donde $u = 2x$. Así, hacemos la sustitución trigonométrica

$$2x = u = 3\sec(\theta), \qquad 2dx = du = 3\sec(\theta)\tan(\theta)d\theta.$$

Por lo tanto, sustituyendo

$$x = \frac{3}{2}\sec(\theta), \qquad dx = \frac{3}{2}\sec(\theta)\tan(\theta)d\theta,$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x} &= \int \frac{\sqrt{(3\sec(\theta))^2-9}}{\left(\frac{3}{2}\sec(\theta)\right)}\left(\frac{3}{2}\sec(\theta)\tan(\theta)\right)d\theta, \\ &= \frac{2}{3}\int \frac{\sqrt{9\sec^2(\theta)-9}}{\sec(\theta)}\tan(\theta)d\theta.\end{aligned}$$

(1,0 pto. por hacer la sustitución)

Ahora, teniendo en cuenta que $\sqrt{9\sec^2(\theta)-9} = 3\sqrt{\sec^2(\theta)-1} = 3\sqrt{\tan^2(\theta)} = 3\tan(\theta)$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x} &= \frac{2}{3}\int \frac{3\tan(\theta)}{\sec(\theta)}\tan(\theta)d\theta, \\
&= 2\int \frac{\tan^2(\theta)}{\sec(\theta)}d\theta \\
&= 2\int \frac{\sec^2(\theta)-1}{\sec(\theta)}d\theta, \\
&= 2\int \left(\frac{\sec^2(\theta)}{\sec(\theta)} - \frac{1}{\sec(\theta)}\right)d\theta, \\
&= 2\int (\sec(\theta)-\cos(\theta))\,d\theta, \\
&= 2\left(\ln|\sec(\theta)+\tan(\theta)| - \operatorname{sen}(\theta)\right) + C,
\end{aligned}$$

donde se ha usado que $\tan^2(\theta) = \sec^2(\theta) - 1$ y que

$$\int \sec(\theta)d\theta = \ln|\sec(\theta)+\tan(\theta)| + C, \qquad \int \cos(\theta)d\theta = \operatorname{sen}(\theta) + C.$$

(1,0 pto. por calcular la primitiva)

Para regresar a la variable original, se debe expresar las funciones trigonométricas $\tan(\theta)$, $\sec(\theta)$ y $\operatorname{sen}(\theta)$ en términos de x. Recordando que

$$x = \frac{3}{2}\sec(\theta) \implies \sec(\theta) = \frac{2x}{3},$$

obtenemos que

$$\tan(\theta) = \frac{\sqrt{4x^2-9}}{3} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{4x^2-9}}{2x}.$$

En consecuencia,

$$\int \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x} = 2\left(\ln\left|\frac{2x}{3} + \frac{\sqrt{4x^2-9}}{3}\right| - \frac{\sqrt{4x^2-9}}{2x}\right) + C.$$

(1,0 pto. por dejar la primitiva en términos de la variable original)

Segunda forma (usando una sustitución algebraica):
Usemos la sustitución

$$u = \sqrt{4x^2-9} \qquad du = \frac{4x}{\sqrt{4x^2-9}}dx$$

que implica que $x = \frac{\sqrt{u^2+9}}{2}$. Así, tenemos que

$$dx = \frac{\sqrt{4x^2-9}}{4x}du = \frac{u}{4\frac{\sqrt{u^2+9}}{2}}du = \frac{u}{2\sqrt{u^2+9}}du.$$

(1,0 pto. por hacer la sustitución)

por lo que, reemplazando en la primitiva original, vemos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x}\,dx &= \int \frac{u^2}{u^2+9}\,du \\
&= \int \frac{u^2+9-9}{u^2+9}\,du \\
&= \int \left(\frac{u^2+9}{u^2+9} - \frac{9}{u^2+9}\right)\,du \\
&= \int dx - 9\int \frac{1}{u^2+9}\,du \qquad \textbf{(1,5 pts. por determinar las primitivas)} \\
&= u - 9\cdot\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{u}{3}\right) + C \\
&= \sqrt{4x^2-9} - 3\arctan\left(\frac{\sqrt{4x^2-9}}{3}\right) + C.
\end{aligned}$$

(0,5 pts. por dejar la primitiva en términos de la variable original)

f) (3,0 pts.)

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

Solución:

Primera forma (usando una sustitución trigonométrica):

Usamos la sustitución

$$x = \tan(\theta), \qquad dx = \sec^2\theta\,d\theta.$$

Con esto, $x^2+1 = \tan^2(\theta)+1 = \sec^2(\theta)$. Por lo tanto,

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{\sec^2(\theta)}{(\sec^2(\theta))^2}\,d\theta = \int \frac{1}{\sec^2(\theta)}\,d\theta = \int \cos^2(\theta)\,d\theta.$$

(1,0 pto. por hacer la sustitución)

Usando la identidad trigonométrica

$$\cos^2(\theta) = \frac{\cos(2\theta)+1}{2},$$

vemos que

$$\begin{aligned}
\int \cos^2(\theta)\,d\theta &= \int \frac{\cos(2\theta)+1}{2}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} + \frac{\theta}{2} + C \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) + \frac{\theta}{2} + C.
\end{aligned}$$

(1,0 pto. por calcular la primitiva)

Si $x = \tan\theta$, por trigonometría se puede obtener que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Así, se obtiene que

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan x\right) + C.$$

(1,0 pto. por dejar la primitiva en términos de la variable original)

Segunda forma (integrando por partes para reducir el exponente de (x^2+1)*):*
Integremos por partes usando

$$u = \frac{1}{x}, \qquad dv = \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx,$$
$$du = -\frac{1}{x^2}\,dx, \qquad v = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}.$$

Así, la primitiva queda

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx &= -\frac{1}{2x(x^2+1)} - \int \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx \\
&= -\frac{1}{2x(x^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,dx
\end{aligned}$$

(1,0 pto. por hacer la integración por partes)

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2x(x^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-x^2}{x^2(x^2+1)}\,dx \\
&= -\frac{1}{2x(x^2+1)} - \frac{1}{2}\int \left(\frac{x^2+1}{x^2(x^2+1)} - \frac{x^2}{x^2(x^2+1)}\right)dx \\
&= -\frac{1}{2x(x^2+1)} - \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx
\end{aligned}$$

(1,0 pto. por separar la expresión en dos)

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2x(x^2+1)} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x} - \arctan(x)\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan(x)\right) + C.
\end{aligned}$$

(1,0 pto. por determinar la primitiva original)

Tercera forma (integrando por partes para elevar el exponente de (x^2+1)*):*
Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, definamos

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx.$$

Integremos I_n por partes con

$$u = \frac{1}{(x^2+1)^n} \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{-2nx}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx \qquad v = x.$$

Así, obtenemos

$$I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} - \int \frac{-2nx^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx$$ **(1,0 pto. por hacer la integración por partes)**

$$\begin{aligned}
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \left(\frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}} - \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\right)dx
\end{aligned}$$

(0,5 pts. por separar la expresión en dos)

$$\begin{aligned}
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{1}{(x^2+1)^{n}}\,dx - 2n\int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1},
\end{aligned}$$

de donde podemos despejar I_{n+1} para obtener

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n.$$

(0,5 pts. encontrar la recurrencia)

Como

$$I_1 = \int \frac{1}{(x^2+1)}\,dx = \arctan(x) + C,$$

resulta que, tomando $n = 1$,

$$I_2 = \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan(x)\right) + C.$$

(1,0 pts. por determinar la primitiva original)

Instrucciones: Escriba claramente, al inicio de la hoja que entregará, cuáles son las dos primitivas que desea que sean revisadas. Puede entregar respuestas de varias de ellas, pero solo se revisarán aquellas dos que indique al principio de la hoja.

P2. Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sea

$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

El objetivo de este problema es demostrar que $\lim_{n\to\infty} S_n = \ln(2)$. Para esto, siga el siguiente esquema.

a) (1,5 pts.) Considere la función $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln(1+x)$. Pruebe que f es infinitas veces derivable en todo su dominio mostrando por inducción que

$$f^{[k]}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k},$$

para todo $k \geq 1$.

Solución:
La función f es derivable en todo el intervalo $(-1,\infty)$ por álgebra y composición de funciones derivables. Su derivada es

$$f^{[1]}(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^{1-1}(1-1)!}{(1+x)^1}$$

ya que $(-1)^{1-1} = (-1)^0 = 1$ y $(1-1)! = 0! = 1$. Por lo tanto, se cumple el caso base de la inducción.

(0,5 pts. por establecer el caso base de la inducción)

Para el paso inductivo, supongamos que

$$f^{[k]}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

y demostremos que

$$f^{[k+1]}(x) = \frac{(-1)^{(k+1)-1}((k+1)-1)!}{(1+x)^{k+1}}.$$

(0,5 pts. por establecer la hipótesis de inducción y lo que se quiere demostrar)

Primero, la función $f^{[k]}(x)$ es derivable en todo el intervalo $(-1, \infty)$ por álgebra y composición de funciones derivables. Su derivada es

$$f^{[k+1]}(x) = (f^{[k]})'(x) = (-1)^{k-1}(k-1)! \frac{-k}{(1+x)^{k+1}} = \frac{(-1)^{(k-1)+1}k!}{(1+x)^{k+1}} = \frac{(-1)^{(k+1)-1}((k+1)-1)!}{(1+x)^{k+1}},$$

lo que completa el paso inductivo.

(0,5 pts. por calcular la derivada de $\boldsymbol{f^{[k]}}$ y completar la demostración)

b) (1,5 pts.) Calcule el desarrollo de Taylor de orden n de f en torno a $\bar{x} = 0$, es decir, calcule $T_f^n(x)$.

Solución:

Por definición, se tiene que

$$T_f^n(h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{f''(\bar{x})}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{[n]}(\bar{x})}{n!}h^n,$$

donde $h = x - \bar{x}$. Como $\bar{x} = 0$, tenemos que $h = x$ y así

$$T_f^n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{[n]}(0)}{n!}x^n.$$

(0,5 pts. por escribir la definición de un desarrollo de Taylor en $\boldsymbol{\bar{x} = 0}$)

Por otro lado, de la parte anterior, tenemos que

$$f^{[k]}(0) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+0)^k} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{1} = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

para todo $k \geq 1$.

(0,5 pts. por calcular $\boldsymbol{f^{[k]}(0)}$)

Obtenemos

$$\begin{aligned}
T_f^n(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{[n]}(0)}{n!}x^n \\
&= \ln(1+0) + (-1)^{1-1}(1-1)! \cdot x + \frac{(-1)^{2-1}(2-1)!}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n \\
&= 0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \\
&= x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,
\end{aligned}$$

donde usamos que $\frac{(k-1)!}{k!} = \frac{1}{k}$ para todo $k \geq 1$.

(0,5 pts. por completar el cálculo del desarrollo de Taylor)

c) (1,5 pts.) Muestre que, para todo $x > 0$, se tiene que $f(x) = T_f^n(x) + R_{n+1}(x)$, donde

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\xi_n)^{n+1}} x^{n+1},$$

con algún $\xi_n \in (0, x)$.

Solución:
Sea $x > 0$. De la fórmula de Taylor, como f es $(n+1)$ veces derivable en todo el intervalo $(-1, \infty)$ (de la parte a)), tenemos que existe $\xi_n \in (0, x)$ tal que

$$f(x) = T_f^n(x - \bar{x}) + \frac{f^{[n+1]}(\xi_n)}{(n+1)!}(x - \bar{x})^{n+1}.$$

Usando nuevamente que $\bar{x} = 0$ esto queda

$$f(x) = T_f^n(x) + \frac{f^{[n+1]}(\xi_n)}{(n+1)!} x^{n+1}. \tag{5}$$

(0,5 pts. por usar la fórmula de Taylor con $\bar{x} = 0$)

Ahora, nuevamente por la parte a), tenemos que

$$f^{[n+1]}(\xi_n) = \frac{(-1)^n n!}{(1+\xi_n)^{n+1}}.$$

(0,5 pts. por calcular la $f^{[n+1]}(\xi_n)$)

Reemplazando en (5) queda que

$$f(x) = T_f^n(x) + \frac{(-1)^n n!}{(1+\xi_n)^{n+1}} \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} = T_f^n(x) + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\xi_n)^{n+1}} x^{n+1} = T_f^n(x) + R_{n+1}(x),$$

donde nuevamente usamos que $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$.

(0,5 pts. por completar el cálculo)

d) (1,5 pts.) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} |R_{n+1}(1)| = 0$. Concluya el resultado tomando $x = 1$ en la igualdad de la parte anterior.

Solución:
Tenemos que

$$|R_{n+1}(1)| = \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\xi_n)^{n+1}} 1^{n+1} \right| = \left| \frac{1}{(n+1)(1+\xi_n)^{n+1}} \right| = \frac{1}{(n+1)|1+\xi_n|^{n+1}}.$$

Como $\xi_n \in (0, 1)$, tenemos que $|1 + \xi_n| \geq 1$, de donde $|1 + \xi_n|^{n+1} \geq 1^{n+1} = 1$. Así,

$$|R_{n+1}(1)| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Esto muestra que $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(1) = 0$

(0,3 pts. por mostrar que $R_{n+1}(1) \to 0$)

Finalmente, la parte anterior muestra que, tomando $x = 1$,

$$\ln(2) = f(1) = T_f^n(1) + R_{n+1}(1). \tag{6}$$

(0,3 pts. por mostrar que $\ln(2) = T_f^n(1) + R_{n+1}(1)$)

De la parte b), tenemos que

$$\begin{aligned} T_f^n(1) &= 1 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 + \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{4}\cdot 1^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot 1^n \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = S_n, \end{aligned}$$

(0,3 pts. por mostrar que $T_f^n(1) = S_n$) de donde, por (6),

$$S_n = \ln(2) - R_{n+1}(1).$$

(0,3 pts. por mostrar que $S_n = \ln(2) - R_{n+1}(1)$)

Así, usando que $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(1) = 0$, por álgebra de límites concluimos que $\lim_{n\to\infty} S_n = \ln(2)$

(0,3 pts. por completar la demostración)

P3. [Sección 1 y Sección 2]

Sea $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & 0 \le x < 1 \\ 2x & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

a) (1,5 pts.) Considere la partición $P = \{0, 1, 2\}$. Calcule la suma inferior $s(f, P)$ y la suma superior $S(f, P)$.

Solución: Usando la partición indicada, se tienen dos intervalos: $I_1 = [0, 1]$, $I_2 = [1, 2]$. Así, se tiene que $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 1$. Se calculan los ínfimos en cada intervalo:

$$m_1(f) = \inf\{f(x) \mid x \in I_1\} = 1, \quad m_2(f) = \inf\{f(x) \mid x \in I_2\} = 2$$

(0,4 pts. por calcular los ínfimos)

Con eso, se calcula la suma inferior

$$s(f, P) = m_1(f)\Delta x_1 + m_2(f)\Delta x_2 = m_1(f) + m_2(f) = 1 + 2 = 3$$

(0,35 pts. por calcular la suma inferior)

Se calculan también los supremos,

$$M_1(f) = \sup\{f(x) \mid x \in I_1\} = 2, \quad M_2(f) = \sup\{f(x) \mid x \in I_2\} = 4$$

(0,4 pts. por calcular los supremos)

y calcula la suma superior

$$S(f, P) = M_1(f)\Delta x_1 + M_2(f)\Delta x_2 = M_1(f) + M_2(f) = 2 + 4 = 6$$

(0,35 pts. por calcular la suma superior)

b) (3,0 pts.) Para $n \in \mathbb{N}$ con $n \ge 2$, sea $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_{2n}\}$ la partición de $[0, 2]$ con $x_i = \frac{i}{n}$ para $i \in \{0, \ldots, 2n\}$.

Muestre que

$$\begin{aligned} s(f, P_n) &= \frac{3(3n-1)}{2n} \\ S(f, P_n) &= \frac{9n^2 + 5n - 2}{2n^2}. \end{aligned}$$

Solución: Los puntos de la partición son de la forma $x_i = \frac{i}{n}$. Por lo tanto,

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

(0,2 pts. por calcular $\boldsymbol{\Delta x_i}$)

Definamos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ para cada $1 \leq i \leq 2n$, y definamos $f_1 \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ y $f_2 \colon [1,2] \to \mathbb{R}$ dadas por $f_1(x) = 2 - x$ y $f_2(x) = 2x$. Notemos que f_1 es decreciente y coincide con f en $[0,1)$, mientras que f_2 es creciente y coincide con f en $[1,2]$.

Como debemos calcular los ínfimos y supremos de f en cada intervalo I_i, con $i \in \{1, \ldots, 2n\}$, es útil determinar si f coincide con f_1 o con f_2 en cada uno de estos intervalos. Tenemos que f coincide con f_1 en I_i si $I_i \subseteq [0,1)$, lo que ocurre para $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Por otro lado, f coincide con f_2 en I_i si $I_i \subseteq [1,2]$, lo que ocurre para $i \in \{n+1, \ldots, 2n\}$. Por lo tanto, solo en el intervalo I_n se tiene que f no es igual a f_1 o f_2, siendo igual a f_1 en $\left[1 - \frac{1}{n}, 1\right)$, e igual a f_2 en $\{1\}$.

Suma inferior: Se calculan los ínfimos en cada intervalo de la partición. Si $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, f coincide con f_1 en I_i, que es decreciente, por lo que el ínfimo se alcanza en el extremo derecho del intervalo I_i. Así, para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$,

$$m_i(f) = \operatorname{ínf}\{f(x) \mid x \in I_i\} = f_1(x_i) = f_1\left(\frac{i}{n}\right) = 2 - \frac{i}{n}.$$

(0,3 pts. por calcular $\boldsymbol{m_i(f)}$ para $\boldsymbol{i \in \{1, \ldots, n-1\}}$)

Por otro lado, si $i \in \{n+1, \ldots, 2n\}$, f coincide con f_2 en I_i, que es creciente, por lo que el ínfimo se alcanza en el extremo izquierdo del intervalo I_i. Así, para todo $i \in \{n+1, \ldots, 2n\}$,

$$m_i(f) = \operatorname{ínf}\{f(x) \mid x \in I_i\} = f_2(x_{i-1}) = f_2\left(\frac{i-1}{n}\right) = 2\frac{(i-1)}{n}.$$

(0,3 pts. por calcular $\boldsymbol{m_i(f)}$ para $\boldsymbol{i \in \{n+1, \ldots, 2n\}}$)

Finalmente, si $i = n$ tenemos que

$$\begin{aligned}
m_n(f) &= \operatorname{ínf}\left\{f(x) \;\middle|\; x \in \left[1 - \frac{1}{n}, 1\right]\right\} \\
&= \operatorname{mín}\left\{\operatorname{ínf}\left\{f_1(x) \;\middle|\; x \in \left[1 - \frac{1}{n}, 1\right)\right\}, f_2(1)\right\} \\
&= \operatorname{mín}\{f_1(1), f_2(1)\} = f_1(1).
\end{aligned}$$

(0,3 pts. por calcular $\boldsymbol{m_n(f)}$)

Luego,

$$\begin{aligned}
s(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} \left(2 - \frac{i}{n}\right)\frac{1}{n} + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{2(i-1)}{n} \cdot \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(2 - \frac{i}{n}\right) + \frac{1}{n^2}\sum_{i=n+1}^{2n} 2(i-1) \\
&= \frac{1}{n}\left(2n - \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right) + \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(i+n) \\
&= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + \frac{2}{n^2}\left(\frac{(n-1)n}{2} + n^2\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + \frac{n-1}{n} + 2 \\
&= \frac{3(3n-1)}{2n}.
\end{aligned}
$$

(0,5 pts. por calcular $s(f, P_n)$)

Suma superior: Se calculan los supremos en cada intervalo de la partición. Si $i \in \{1, \dots, n-1\}$, f coincide con f_1 en I_i, que es decreciente, por lo que el supremo se alcanza en el extremo izquierdo del intervalo I_i. Así, para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$M_i(f) = \sup\{f(x) \ \mid \ x \in I_i\} = f_1(x_{i-1}) = f_1\left(\frac{i-1}{n}\right) = 2 - \frac{i-1}{n}.$$

(0,3 pts. por calcular $M_i(f)$ para $i \in \{1, \dots, n-1\}$)

Por otro lado, si $i \in \{n+1, \dots, 2n\}$, f coincide con f_2 en I_i, que es creciente, por lo que el supremo se alcanza en el extremo derecho del intervalo I_i. Así, para todo $i \in \{n+1, \dots, 2n\}$,

$$M_i(f) = \sup\{f(x) \ \mid \ x \in I_i\} = f_2(x_i) = f_2\left(\frac{i}{n}\right) = 2 \cdot \frac{i}{n}.$$

(0,3 pts. por calcular $M_i(f)$ para $i \in \{n+1, \dots, 2n\}$)

Finalmente, si $i = n$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
M_n(f) &= \sup\left\{f(x) \ \middle| \ x \in \left[1 - \frac{1}{n}, 1\right]\right\} \\
&= \max\left\{\sup\left\{f_1(x) \ \middle| \ x \in \left[1 - \frac{1}{n}, 1\right)\right\}, f_2(1)\right\} \\
&= \max\{f_1(1), f_2(1)\} = f_2(1).
\end{aligned}
$$

(0,3 pts. por calcular $M_n(f)$)

Luego,

$$
\begin{aligned}
S(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n-1}\left(2 - \frac{(i-1)}{n}\right)\frac{1}{n} + \sum_{i=n}^{2n} \frac{2i}{n} \cdot \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n}\left(2(n-1) - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} i\right) + \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n}(i+n) \\
&= \frac{1}{n}\left(2n - 2 - \frac{1}{n} \cdot \frac{(n-2)(n-1)}{2}\right) + \frac{2}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2} + n(n+1)\right) \\
&= 2 - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-2)(n-1)}{2} + \frac{3(n+1)}{n} \\
&= \frac{9n^2 + 5n - 2}{2n^2}.
\end{aligned}
$$

(0,5 pts. por calcular $S(f, P_n)$)

c) (1,5 pts.) Usando la parte anterior, justifique que f es Riemann-integrable y calcule $\int_0^2 f$.

Solución:

Primera forma (usando la condición de Riemann):

Sea $\varepsilon > 0$. La condición de Riemann dice que f es integrable en $[0, 2]$ si existe una partición P_ε de dicho intervalo que satisface

$$S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

(0,3 pts. por enunciar la condición de Riemann)

De la parte anterior, tenemos que

$$S(f, P_n) - s(f, P_n) = \frac{9n^2 + 5n - 2}{2n^2} - \frac{3(3n-1)}{2n} = \frac{4n-1}{n^2}.$$

(0,3 pts. por calcular $\boldsymbol{S(f, P_n) - s(f, P_n)}$)

Notemos que la condición de Riemann se satisface usando una partición P_n tal como la de la parte anterior, con $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{4n-1}{n^2} < \varepsilon.$$

(0,3 pts. por decir que una partición $\boldsymbol{P_n}$ hace que se satisfaga la condición de Riemann)

Luego, la función es integrable y, por la parte anterior,

$$\frac{3(3n-1)}{2n} = s(f, P_n) \leq \int_0^2 f \leq S(f, P_n) = \frac{9n^2 + 5n - 2}{2n^2}.$$

(0,3 pts. por encontrar cotas para la integral)

Tomando límite y por Teorema del Sandwich, se obtiene

$$\int_0^2 f = \frac{9}{2}.$$

(0,3 pts. por obtener el valor de la integral)

Segunda forma (usando la definición):

Sabemos que, para cualquier partición $P \in \mathcal{P}_{[0,2]}$,

$$s(f, P) \leq \underline{\int_0^2} f \leq \overline{\int_0^2} f \leq S(f, P).$$

(0,3 pts. por enunciar la propiedad)

En particular, tomando $P = P_n$ la partición P_n de la parte anterior,

$$\frac{3(3n-1)}{2n} = s(f, P_n) \leq \underline{\int_0^2} f \leq \overline{\int_0^2} f \leq S(f, P_n) = \frac{9n^2 + 5n - 2}{2n^2}$$

para todo $n \geq 2$.

(0,3 pts. por encontrar cotas para la integral inferior y superior)

Tomando límite en n y, por el Teorema del Sandwich, vemos que

$$\frac{9}{2} \leq \underline{\int_0^2} f \leq \overline{\int_0^2} f \leq \frac{9}{2}.$$

(0,3 pts. por tomar límite)

Obtenemos

$$\underline{\int_0^2} f = \overline{\int_0^2} f = \frac{9}{2}.$$

(0,3 pts. por mostrar que las integrales inferior y superior son iguales a $\frac{9}{2}$)

Así, f es integrable e

$$\int_0^2 f = \frac{9}{2}.$$

(0,3 pts. por obtener el valor de la integral)

P3. [Sección 3]

Sea $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & 0 \leq x < 1 \\ 2x & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

a) (1,5 pts.) Considere la partición $P = \{0,1,2\}$. Calcule la suma inferior $s(f,P)$ y la suma superior $S(f,P)$.

Solución: Usando la partición indicada, se tienen dos intervalos: $I_1 = [0,1]$, $I_2 = [1,2]$. Así, se tiene que $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 1$. Se calculan los ínfimos en cada intervalo:

$$m_1(f) = \text{ínf}\{f(x) \ \mid \ x \in I_1\} = 1, \quad m_2(f) = \text{ínf}\{f(x) \ \mid \ x \in I_2\} = 2.$$

(0,4 pts. por calcular los ínfimos)

Con eso, se calcula la suma inferior

$$s(f,P) = m_1(f)\Delta x_1 + m_2(f)\Delta x_2 = m_1(f) + m_2(f) = 1 + 2 = 3.$$

(0,35 pts. por calcular la suma inferior)

Se calculan también los supremos,

$$M_1(f) = \sup\{f(x) \ \mid \ x \in I_1\} = 2, \quad M_2(f) = \sup\{f(x) \ \mid \ x \in I_2\} = 4.$$

(0,4 pts. por calcular los supremos)

y calcula la suma superior

$$S(f,P) = M_1(f)\Delta x_1 + M_2(f)\Delta x_2 = M_1(f) + M_2(f) = 2 + 4 = 6.$$

(0,35 pts. por calcular la suma superior)

b) (3,0 pts.) Para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, sea $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_{2n}\}$ la partición de $[0,2]$ con $x_i = \frac{i}{n}$ para $i \in \{0, \ldots, 2n\}$.

Muestre que

$$s(f,P_n) = \frac{3(3n-1)}{2n}$$
$$S(f,P_n) = \frac{3(3n+1)}{2n}.$$

Solución: Los puntos de la partición son de la forma $x_i = \frac{i}{n}$. Por lo tanto,

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

(0,2 pts. por calcular $\boldsymbol{\Delta x_i}$)

Definamos $I_i = (x_{i-1}, x_i)$ para cada $1 \leq i \leq 2n$, y definamos $f_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ y $f_2\colon [1,2] \to \mathbb{R}$ dadas por $f_1(x) = 2 - x$ y $f_2(x) = 2x$. Notemos que f_1 es decreciente y coincide con f en $[0,1)$, mientras que f_2 es creciente y coincide con f en $[1,2]$.

Como debemos calcular los ínfimos y supremos de f en cada intervalo I_i, con $i \in \{1, \ldots, 2n\}$, es útil determinar si f coincide con f_1 o con f_2 en cada uno de estos intervalos. Tenemos que f coincide con f_1 en I_i si $I_i \subseteq [0,1)$, lo que ocurre para $i \in \{1,\ldots,n\}$. Por otro lado, f coincide con f_2 en I_i si $I_i \subseteq [1,2]$, lo que ocurre para $i \in \{n+1,\ldots,2n\}$.

Suma inferior: Se calculan los ínfimos en cada intervalo de la partición. Si $i \in \{1,\ldots,n\}$, f coincide con f_1 en I_i, que es decreciente, por lo que el ínfimo se alcanza en el extremo derecho del intervalo I_i. Así, para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$,

$$m_i(f) = \text{ínf}\{f(x) \ \mid \ x \in I_i\} = f_1(x_i) = f_1\left(\frac{i}{n}\right) = 2 - \frac{i}{n}.$$

(0,4 pts. por calcular $\boldsymbol{m_i(f)}$ para $\boldsymbol{i \in \{1,\ldots,n\}}$)

Por otro lado, si $i \in \{n+1,\ldots,2n\}$, f coincide con f_2 en I_i, que es creciente, por lo que el ínfimo se alcanza en el extremo izquierdo del intervalo I_i. Así, para todo $i \in \{n+1,\ldots,2n\}$,

$$m_i(f) = \text{ínf}\{f(x) \ \mid \ x \in I_i\} = f_2(x_{i-1}) = f_2\left(\frac{i-1}{n}\right) = 2\frac{(i-1)}{n}.$$

(0,4 pts. por calcular $\boldsymbol{m_i(f)}$ para $\boldsymbol{i \in \{n+1,\ldots,2n\}}$)

Luego,

$$\begin{aligned}
S(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n}\left(2-\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n} + \sum_{i=n+1}^{2n}\frac{2(i-1)}{n}\cdot\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(2-\frac{i}{n}\right) + \frac{1}{n^2}\sum_{i=n+1}^{2n}2(i-1) \\
&= \frac{1}{n}\left(2n - \frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right) + \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(i+n) \\
&= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + \frac{2}{n^2}\left(\frac{(n-1)n}{2} + n^2\right) \\
&= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + \frac{n-1}{n} + 2 \\
&= \frac{3(3n+1)}{2n}.
\end{aligned}$$

(0,6 pts. por calcular $\boldsymbol{s(f,P_n)}$)

Suma superior: Se calculan los supremos en cada intervalo de la partición. Si $i \in \{1,\ldots,n\}$, f coincide con f_1 en I_i, que es decreciente, por lo que el supremo se alcanza en el extremo izquierdo del intervalo I_i. Así, para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$,

$$M_i(f) = \sup\{f(x) \ \mid \ x \in I_i\} = f_1(x_{i-1}) = f_1\left(\frac{i-1}{n}\right) = 2 - \frac{i-1}{n}.$$

(0,4 pts. por calcular $\boldsymbol{M_i(f)}$ para $\boldsymbol{i \in \{1,\ldots,n\}}$)

Por otro lado, si $i \in \{n+1,\ldots,2n\}$, f coincide con f_2 en I_i, que es creciente, por lo que el supremo se alcanza en el extremo derecho del intervalo I_i. Así, para todo $i \in \{n+1,\ldots,2n\}$,

$$M_i(f) = \sup\{f(x) \ \mid \ x \in I_i\} = f_2(x_i) = f_2\left(\frac{i}{n}\right) = 2\cdot\frac{i}{n}.$$

(0,4 pts. por calcular $\boldsymbol{M_i(f)}$ para $\boldsymbol{i \in \{n+1,\ldots,2n\}}$)

Luego,

$$\begin{aligned}
S(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n}\left(2-\frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{n} + \sum_{i=n+1}^{2n}\frac{2i}{n}\cdot\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(2-\frac{i}{n}\right) + \frac{1}{n^2}\sum_{i=n+1}^{2n} 2i \\
&= \frac{1}{n}\left(2n - \frac{1}{n}\cdot\frac{(n-1)n}{2}\right) + \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i+n) \\
&= 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \frac{2}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2} + n^2\right) \\
&= 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \frac{n+1}{n} + 2 \\
&= \frac{3(3n+1)}{2n}.
\end{aligned}$$

(0,6 pts. por calcular $S(f,P_n)$)

c) (1,5 pts.) Usando la parte anterior, justifique que f es Riemann-integrable y calcule $\int_0^2 f$.

Solución:

Primera forma (usando la condición de Riemann):

Sea $\varepsilon > 0$. La condición de Riemann dice que f es integrable en $[0,2]$ si existen funciones escalonadas $e_+^\varepsilon \in \mathcal{E}_+(f)$ y $e_-^\varepsilon \in \mathcal{E}_-(f)$ tales que

$$\int_0^2 e_+^\varepsilon - \int_0^2 e_-^\varepsilon \leq \varepsilon.$$

(0,3 pts. por enunciar la condición de Riemann)

Como la suma superior $S(f,P_n)$ es igual a la integral de cierta función escalonada $e_+^n \in \mathcal{E}_+(f)$ y, a su vez, la suma inferior $s(f,P_n)$ es igual a la integral de cierta función escalonada $e_-^n \in \mathcal{E}_-(f)$, es suficiente demostrar que $S(f,P_n) - s(f,P_n) \leq \varepsilon$ para algún $n \geq 2$. Tenemos que

$$S(f,P_n) - s(f,P_n) = \frac{3(3n+1)}{2n^2} - \frac{3(3n-1)}{2n} = \frac{3}{n}$$

(0,3 pts. por calcular $S(f,P_n) - s(f,P_n)$)

Notemos que la condición de Riemann se satisface usando una partición P_n tal como la de la parte anterior, con $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{3}{n} \leq \varepsilon.$$

(0,3 pts. por decir que una partición P_n hace que se satisfaga la condición de Riemann)

Luego, la función es integrable y, por la parte anterior,

$$\frac{3(3n-1)}{2n} = s(f,P_n) \leq \int_0^2 f \leq S(f,P_n) = \frac{3(3n+1)}{2n}.$$

(0,3 pts. por encontrar cotas para la integral)

Tomando límite y por Teorema del Sandwich, se obtiene

$$\int_0^2 f = \frac{9}{2}.$$

(0,3 pts. por obtener el valor de la integral)

Segunda forma (usando la definición):
Sabemos que, para cualquier par de funciones escalonadas $e_+ \in \mathcal{E}_+(f)$ y $e_- \in \mathcal{E}_-(f)$ se tiene que

$$\int_0^2 e_- \leq I_-(f) \leq I_+(f) \leq \int_0^2 e_+.$$

(0,3 pts. por enunciar la propiedad)

En particular, tomando la función escalonada $e_+^n \in \mathcal{E}_+(f)$ cuya integral es igual a $S(f, P_n)$, y la función escalonada $e_-^n \in \mathcal{E}_-(f)$ cuya integral es igual a $s(f, P_n)$, obtenemos

$$\frac{3(3n-1)}{2n} = s(f, P_n) \leq I_-(f) \leq I_+(f) \leq S(f, P_n) = \frac{3(3n+1)}{2n^2}$$

para todo $n \geq 2$.

(0,3 pts. por encontrar cotas para la integral inferior y superior)

Tomando límite en n y, por el Teorema del Sandwich, vemos que

$$\frac{9}{2} \leq I_-(f) \leq I_+(f) \leq \frac{9}{2}.$$

(0,3 pts. por tomar límite)

Obtenemos

$$I_-(f) = I_+(f) = \frac{9}{2}.$$

(0,3 pts. por mostrar que las integrales inferior y superior son iguales a $\frac{9}{2}$)

Así, f es integrable e

$$\int_0^2 f = \frac{9}{2}.$$

(0,3 pts. por obtener el valor de la integral)

Duración: 3h.