Control 2

P1. Calcule dos de las siguientes primitivas:

a) (3,0 pts.) $\displaystyle\int e^x \sqrt{1+e^{2x}}\,dx$

b) (3,0 pts.) $\displaystyle\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\,dx$

c) (3,0 pts.) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)+1}\,dx$

d) (3,0 pts.) $\displaystyle\int x^3 \ln^2(x)\,dx$

e) (3,0 pts.) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x}\,dx$

f) (3,0 pts.) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$

Instrucciones: Escriba claramente, al inicio de la hoja que entregará, cuáles son las dos primitivas que desea que sean revisadas. Puede entregar respuestas de varias de ellas, pero solo se revisarán aquellas dos que indique al principio de la hoja.

P2. Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sea

$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

El objetivo de este problema es demostrar que $\lim_{n\to\infty} S_n = \ln(2)$. Para esto, siga el siguiente esquema.

a) (1,5 pts.) Considere la función $f\colon(-1,\infty)\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\ln(1+x)$. Pruebe que f es infinitas veces derivable en todo su dominio mostrando por inducción que

$$f^{[k]}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k},$$

para todo $k \geq 1$.

b) (1,5 pts.) Calcule el desarrollo de Taylor de orden n de f en torno a $\bar{x}=0$, es decir, calcule $T_f^n(x)$.

c) (1,5 pts.) Muestre que, para todo $x>0$, se tiene que $f(x) = T_f^n(x) + R_{n+1}(x)$, donde

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\xi_n)^{n+1}} x^{n+1},$$

con algún $\xi_n \in (0,x)$.

d) (1,5 pts.) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} |R_{n+1}(1)| = 0$. Concluya el resultado tomando $x=1$ en la igualdad de la parte anterior.

P3. [Sección 1 y Sección 2]

Sea $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & 0 \le x < 1 \\ 2x & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

a) (1,5 pts.) Considere la partición $P = \{0,1,2\}$. Calcule la suma inferior $s(f,P)$ y la suma superior $S(f,P)$.

b) (3,0 pts.) Para $n \in \mathbb{N}$ con $n \ge 2$, sea $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_{2n}\}$ la partición de $[0,2]$ con $x_i = \frac{i}{n}$ para $i \in \{0, \ldots, 2n\}$.

Muestre que

$$s(f,P_n) = \frac{3(3n-1)}{2n}$$
$$S(f,P_n) = \frac{9n^2+5n-2}{2n^2}.$$

c) (1,5 pts.) Usando la parte anterior, justifique que f es Riemann-integrable y calcule $\int_0^2 f$.

P3. [Sección 3]

Sea $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & 0 \le x < 1 \\ 2x & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

a) (1,5 pts.) Considere la partición $P = \{0,1,2\}$. Calcule la suma inferior $s(f,P)$ y la suma superior $S(f,P)$.

b) (3,0 pts.) Para $n \in \mathbb{N}$ con $n \ge 2$, sea $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_{2n}\}$ la partición de $[0,2]$ con $x_i = \frac{i}{n}$ para $i \in \{0, \ldots, 2n\}$.

Muestre que

$$s(f,P_n) = \frac{3(3n-1)}{2n}$$
$$S(f,P_n) = \frac{3(3n+1)}{2n}.$$

c) (1,5 pts.) Usando la parte anterior, justifique que f es Riemann-integrable y calcule $\int_0^2 f$.

Duración: 3h.