Control 5

P1. Sea (s_n) la sucesión definida por recurrencia como:

$$s_0 = \alpha, \qquad s_1 = \beta, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_{n+1} = s_n \left(\frac{1 + s_{n-1} + s_{n-1}^2}{3} \right),$$

donde $\alpha, \beta \in (0, 1)$.

a) **(3 pts)** Demuestre que $\forall n \geq 1,\ s_n, s_{n-1} \in (0, 1)$.

b) **(3 pts)** Demuestre que (s_n) es convergente y calcule su límite.

P2. a) Calcule los siguientes límites (Justifique apropiadamente sus respuestas)

i) **(1.5 pts)** $\lim \sqrt[n]{4^n + n^5}$

ii) **(1.5 pts)** $\lim \left(\frac{n^3}{2n^2 + 1} - \frac{n^2}{2n + 1} \right)^{1/n}$

b) **(3 pts)** Demuestre que si (q_n) es una sucesión que converge a $\frac{1}{2}$ entonces $n^k q_n^n \to 0$ para cualquier $k \in \mathbb{N}^*$.
Use lo anterior para calcular los límites

$$\lim h_n \quad \text{y} \quad \lim(n \cdot h_n),$$

donde (h_n) es la sucesión definida por $h_n = n^4 \left(\frac{n-1}{2n-1} \right)^n$.

Tiempo: 1:30 horas.