Pauta de corrección Control 2

P1. a) **(3 pts)** Encuentre la ecuación de la circunferencia que es tangente al eje OX y cuyo centro está en el vértice de la parábola $y = x^2 + 4x + 7$.

Solución: Completando cuadrados perfectos se tiene que:

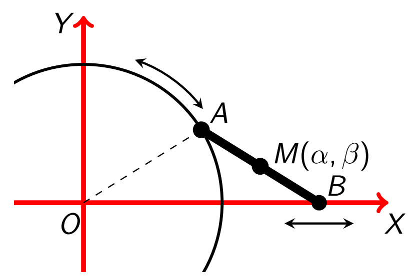
$$\begin{aligned} y = x^2 + 4x + 7 &\iff y = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 4 + 3 \\ &\iff y - 3 = (x+2)^2 \end{aligned}$$

Es decir, el vértice de la parábola está en $V(-2, 3)$ (Pueden usar fórmula $x_V = -\frac{b}{2a}$) 1.0

La circunferencia tiene centro en $(-2, 3)$ y tiene radio $r = 3$. 1.0

Su ecuación es: $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$. 1.0

b) **(3 pts)** Una barra AB, de longitud fija $\overline{AB} = L > 0$ se mueve en el plano, de modo que su extremo A se mueve sobre la circunferencia $\mathscr{C} : x^2 + y^2 = L^2$ y su extremo B se desliza sobre el eje OX (ver figura). Se pide determinar el Lugar Geométrico del punto medio M de la barra. Identifique el lugar geométrico encontrado indicando todos los parámetros importantes (pendiente, centro, radio, semiejes, excentricidad, focos, directrices, asíntotas, etc. según corresponda).



(*Indicación: Observe que el triángulo OAB es isósceles, por lo cual se cumple que $x_B = 2x_A = \frac{4}{3}\alpha$ y algo similar en la dirección Y.*)

Solución: Sea $M(\alpha, \beta)$ el punto del LG buscado.

Claramente (usando la indicación), $x_A = \frac{2}{3}\alpha$ y $y_A = 2\beta$. 1.0

Pero como $A \in \mathscr{C}$ entonces

$$\left(\frac{2}{3}\alpha\right)^2 + (2\beta)^2 = L^2.$$ 0.5

que simplificado queda:

$$\frac{\alpha^2}{\left(\frac{3L}{2}\right)^2} + \frac{\beta^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} = 1.$$ 0.5

Es decir, M se mueve sobre una elipse de semiejes $a = \frac{3L}{2}$ y $b = \frac{L}{2}$, excentricidad $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, focos en $(\pm\sqrt{2}L, 0)$ y directrices $x = \pm\frac{9\sqrt{2}L}{8}$. ($a, b, e, f, d \to 0.1$ c/u) 0.5 0.5

P2. Considere la función definida por $f(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{|x|+1}}$

a) **(3 pts)** Determine Dom(f), ceros y paridad de f.

Solución: Dominio:

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \iff 1 - \frac{2}{|x|+1} \geq 0 \iff \frac{|x|-1}{|x|+1} \geq 0$$

$$\iff |x| \geq 1 \iff x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$ 1.0

Ceros:

$$f(x) = 0 \iff \frac{|x|-1}{|x|+1} = 0$$

$$\iff |x| = 1 \iff x = 1 \quad \vee \quad x = -1.$$ 1.0

Paridad:

$$f(-x) = \sqrt{1 - \frac{2}{|-x|+1}} = \sqrt{1 - \frac{2}{|x|+1}} = f(x).$$

Es decir, es una función PAR. 1.0

b) **(3 pts)** Estudie intervalos de crecimiento o decrecimiento de f. Determine, justificando apropiadamente, el conjunto imagen (Im(f)=Rec(f)) de f. Bosqueje el gráfico de f.

Solución:
Crecimiento en $[1, \infty)$ (por paridad!!)

$$1 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow |x_1| + 1 < |x_2| + 1 \Rightarrow \frac{-2}{|x_1|+1} < \frac{-2}{|x_2|+1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 - \frac{2}{|x_1|+1}} < \sqrt{1 - \frac{2}{|x_2|+1}}.$$

Es decir, en $[1, \infty)$ es estrictamente creciente.

Por paridad, en $(-\infty, -1]$ es estrictamente decreciente. 1.0

Conjunto Imagen: $y \in \mathrm{Im}(f)$

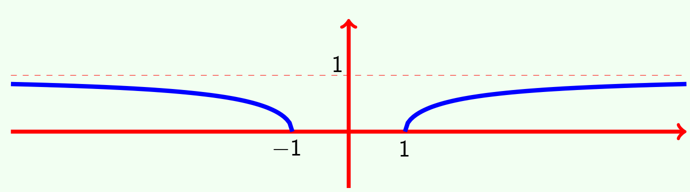
$$\iff \exists x \in Dom(f) : y = \sqrt{1 - \frac{2}{|x|+1}} \iff y \geq 0 \quad \wedge \quad y^2 = 1 - \frac{2}{|x|+1}$$

$$\iff y \geq 0 \quad \wedge \quad |x|(1-y^2) = 1 + y^2 \iff y \in [0, 1) \quad \wedge \quad |x| = \frac{1+y^2}{1-y^2}$$

Es decir: $\mathrm{Im}(f) = [0, 1)$. 1.0

Alternativamente se puede decir que $y \leq 0$ por ser una raíz cuadrada y $y < 1$ ya que $1 - \frac{2}{|x|+1} < 1$ y la raíz es estrictamente creciente. Es decir $\mathrm{Im}(f) \subseteq [0, 1)$ (Alternativa, incompleta) 0.5

El gráfico es:



1.0