Control 1

P1. Sea $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x + \frac{6x}{1+x^2} - 2\arctan(x).$$

a) (1,5 pts.) Argumente que f es derivable en todo su dominio. Calcule f'.
Indicación: Recuerde que $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

> **Solución:** La función f es derivable en todo $(0,\infty)$ por álgebra y composición de funciones derivables, notando que $1+x^2$ nunca se anula para $x \in \mathbb{R}$ **(0,4 pts. por justificar correctamente que f es derivable)**.
> Calculemos f':
>
> $$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x + \frac{6x}{1+x^2} - 2\arctan(x)\right)' && \text{(Definición de } f\text{)} \\ &= (x)' + \left(\frac{6x}{1+x^2}\right)' - 2\arctan'(x) && \text{(Álgebra de derivadas – } \textbf{(0,2 pts.)}\text{)} \\ &= 1 + \left(\frac{6x}{1+x^2}\right)' - \frac{2}{1+x^2} && (x' = 1 \text{ y la indicación – } \textbf{(0,3 pts.)}) \\ &= 1 + \frac{(6x)'\cdot(1+x^2) - (1+x^2)'\cdot 6x}{(1+x^2)^2} - \frac{2}{1+x^2} && \text{(Regla del cociente – } \textbf{(0,3 pts.)}\text{)} \\ &= 1 + \frac{6\cdot(1+x^2) - 2x\cdot 6x}{(1+x^2)^2} - \frac{2}{1+x^2} && ((6x)' = 6 \text{ y } (1+x^2)' = 2x \text{ – } \textbf{(0,3 pts.)}) \\ &= 1 + \frac{6-6x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{2}{1+x^2} && \text{(Simplificar)} \\ &= \frac{(1+x^2)^2 + (6-6x^2) - 2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} && \text{(Agrupar)} \\ &= \frac{x^4 - 6x^2 + 5}{(1+x^2)^2}. && \text{(Simplificar)} \end{aligned}$$

b) (1,5 pts.) Encuentre los intervalos de crecimiento y los puntos críticos de f (es decir, los puntos donde f' se anula). Decida si estos puntos son máximos o mínimos.
Indicación: No se permite usar criterios con derivadas de orden superior.

> **Solución:**
> Para encontrar los intervalos de crecimiento de f, analizamos el signo de su derivada f'. Como
>
> $$f'(x) = \frac{x^4 - 6x^2 + 5}{(1+x^2)^2}$$
>
> y el denominador $(1+x^2)^2$ es positivo y no nulo para todo $x \in (0,\infty)$, tenemos que $f'(x)$ tiene el mismo signo que el polinomio $P(x) = x^4 - 6x^2 + 5$ **(0,2 pts. por llegar a que basta analizar un polinomio)**. Por la misma razón, los puntos críticos de f son las raíces positivas del polinomio P.
> Para encontrar el signo de P, primero encontramos sus raíces. Este polinomio es bicuadrático, por lo que usamos el cambio de variable $u = x^2$. Así, definiendo $Q(u) = u^2 - 6u + 5$, tenemos que $P(x) = Q(u)$.

Notemos que $Q(u) = (u-1)(u-5)$, por lo que sus raíces son 1 y 5. Como $u = x^2$, obtenemos que las raíces de P son $\pm\sqrt{1} = \pm 1$ y $\pm\sqrt{5}$. Concluimos entonces que los puntos críticos de f son 1 y $\sqrt{5}$, donde descartamos las soluciones negativas porque el dominio de f es $(0,\infty)$ **(0,3 pts. por encontrar las raíces del polinomio y los puntos críticos de f)**. Por lo tanto, P tendrá signo constante en los intervalos $(0,1)$, $(1,\sqrt{5})$ y $(\sqrt{5},\infty)$ **(0,3 pts. por encontrar los intervalos que hay que analizar)**.
Ahora, debemos determinar el signo de f' en cada uno de los intervalos $(0,1)$, $(1,\sqrt{5})$ y $(\sqrt{5},\infty)$. Para esto, podemos seguir dos métodos:

Primera forma (evaluar en cada intervalo):

Basta evaluar P en un punto de cada uno de estos intervalos. Así:

$$\begin{aligned}
P(1/2) = \frac{57}{16} > 0 \quad &\implies \quad f' \text{ es positiva en } (0,1) \quad &&\implies \quad f \text{ es creciente en } (0,1] \\
P(2) = -3 < 0 \quad &\implies \quad f' \text{ es negativa en } (1,\sqrt{5}) \quad &&\implies \quad f \text{ es decreciente en } [1,\sqrt{5}] \\
P(3) = 32 > 0 \quad &\implies \quad f' \text{ es positiva en } (\sqrt{5},\infty) \quad &&\implies \quad f \text{ es creciente en } [\sqrt{5},\infty).
\end{aligned}$$

Segunda forma (usar propiedades de la función cuadrática):

Tenemos que Q es un polinomio cuadrático con coeficiente líder (es decir, coeficiente de "x^2") igual a $1 > 0$, por lo que solo es negativo entre sus raíces. Así, Q es positivo en los intervalos $(-\infty,1)$ y $(5,\infty)$, y negativo en el intervalo $(1,5)$. Como $P(x) = Q(x^2)$, concluimos que $P(x)$ es positivo si $x^2 \in (-\infty,1)$ o si $x^2 \in (5,\infty)$, y que es negativo si $x^2 \in (1,5)$. Como el dominio de f es $(0,\infty)$, solo nos interesa el caso en que $x > 0$. En este caso, obtenemos que $P(x)$ es positivo si $x \in (0,1)$ o si $x \in (\sqrt{5},\infty)$, y que es negativo si $x \in (1,\sqrt{5})$. Como el signo de P y de f' es igual, concluimos que $f'(x)$ es positiva si $x \in (0,1)$ o si $x \in (\sqrt{5},\infty)$, y que es negativa si $x \in (1,\sqrt{5})$.

Tercera forma (resolver la desigualdad directamente):

Tenemos que, si $x > 0$,

$$\begin{aligned}
P(x) > 0 &\iff x^4 - 6x^2 + 5 > 0 \\
&\iff (x^2-1)(x^2-5) > 0 \\
&\iff (x^2 < 1) \vee (x^2 > 5) \\
&\iff (x < 1) \vee (x > \sqrt{5}). && \text{(Porque } x > 0\text{)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, P es positivo en los intervalos $(0,1)$ y $(\sqrt{5},\infty)$, y negativo en el intervalo $(1,\sqrt{5})$. Lo mismo es válido para f'.

Esto se resume en la siguiente tabla de crecimiento:

	$0 \ldots 1$	$1 \ldots \sqrt{5}$	$\sqrt{5} \ldots \infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Tabla 1: Tabla de crecimiento de f.

(0,3 pts. por encontrar el signo de f' en cada intervalo y describir la monotonía de f).
Finalmente, como f es creciente en $(0,1]$, tenemos que $f(1) \geq f(x)$ para todo $x \in (0,1]$. Además, como f es decreciente en $[1,\sqrt{5}]$, tenemos que $f(1) \geq f(x)$ para todo $x \in [1,\sqrt{5}]$. Combinando ambas desigualdades, obtenemos que $f(1) \geq f(x)$ para todo $x \in (0,\sqrt{5}]$. Por lo tanto, $\bar{x} = 1$ es un máximo local de f **(0,2 pts. por determinar que $\bar{x} = 1$ es un máximo local de f)**.

Similarmente, como f es decreciente en $[1, \sqrt{5}]$, tenemos que $f(\sqrt{5}) \leq f(x)$ para todo $x \in [1, \sqrt{5}]$. Además, como f es creciente en $[\sqrt{5}, \infty)$, tenemos que $f(\sqrt{5}) \leq f(x)$ para todo $x \in [\sqrt{5}, \infty)$. Combinando ambas desigualdades, obtenemos que $f(\sqrt{5}) \leq f(x)$ para todo $x \in [1, \infty)$. Por lo tanto, $\bar{x} = \sqrt{5}$ es un mínimo local de f **(0,2 pts. por determinar que $\bar{x} = \sqrt{5}$ es un mínimo local de f)**.

c) (1,5 pts.) Argumente que f' es derivable en todo su dominio. Calcule f''.

Solución: La función f' es derivable en todo $\mathbb{R}$ por álgebra y composición de funciones derivables, notando que $(1+x^2)^2$ nunca se anula para $x \in \mathbb{R}$. **(0,4 pts. por justificar correctamente que f' es derivable)**.

Calculemos f'':

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{x^4 - 6x^2 + 5}{(1+x^2)^2}\right)' && \text{(Fórmula para } f'\text{)} \\
&= \frac{(x^4 - 6x^2 + 5)' \cdot (1+x^2)^2 - ((1+x^2)^2)' \cdot (x^4 - 6x^2 + 5)}{(1+x^2)^4} && \text{(Regla del cociente – } \textbf{(0,5 pts.)}\text{)} \\
&= \frac{(4x^3 - 12x) \cdot (1+x^2)^2 - 2(1+x^2) \cdot 2x \cdot (x^4 - 6x^2 + 5)}{(1+x^2)^4} \\
& && \text{(}(x^4 - 6x^2 + 5)' = 4x^3 - 12x \text{ y } ((1+x^2)^2)' = 2(1+x^2) \cdot 2x \text{ – } \textbf{(0,3 pts.)}\text{)} \\
&= \frac{(4x^3 - 12x) \cdot (1+x^2) - 2 \cdot 2x \cdot (x^4 - 6x^2 + 5)}{(1+x^2)^3} && \text{(Cancelar } (1+x^2) \text{ – } \textbf{(0,3 pts.)}\text{)} \\
&= \frac{x((4x^2 + 4x^4 - 12 - 12x^2) - (4x^4 - 24x^2 + 20))}{(1+x^2)^3} && \text{(Expandir)} \\
&= \frac{x(16x^2 - 32)}{(1+x^2)^3} && \text{(Simplificar)} \\
&= \frac{16x(x^2 - 2)}{(1+x^2)^3}. && \text{(Factorizar)}
\end{aligned}$$

d) (1,5 pts.) Encuentre los intervalos de convexidad de f.

Solución: Para encontrar los intervalos de convexidad de f, analizamos el signo de su segunda derivada f''. Como

$$f''(x) = \frac{16x(x^2 - 2)}{(1+x^2)^3},$$

el denominador $(1+x^2)^3$ es positivo y no nulo para todo $x \in \mathbb{R}$, 16 es positivo, y $x > 0$ (porque el dominio de f es $(0, \infty)$), tenemos que $f''(x)$ tiene el mismo signo que el polinomio $R(x) = x^2 - 2$ **(0,6 pts. por llegar a que basta analizar un polinomio)**.

Por otro lado, las raíces de R son $\pm\sqrt{2}$ **(0,3 pts. por encontrar las raíces del polinomio)**. Por lo tanto, R tendrá signo constante en los intervalos $(0, \sqrt{2})$ y $(\sqrt{2}, \infty)$ **(0,3 pts. por encontrar los intervalos que hay que analizar)**.

Ahora, debemos determinar el signo de f'' en cada uno de los intervalos $(0, \sqrt{2})$ y $(\sqrt{2}, \infty)$. Para esto, podemos seguir tres métodos:

Primera forma (evaluar en cada intervalo):

Basta evaluar R en un punto de cada uno de estos intervalos. Así:

$$\begin{array}{llllll}
R(1) = -1 < 0 & \Longrightarrow & f'' \text{ es negativa en } (0, \sqrt{2}) & \Longrightarrow & f \text{ es cóncava en } (0, \sqrt{2}] \\
R(2) = 4 > 0 & \Longrightarrow & f'' \text{ es positiva en } (\sqrt{2}, \infty) & \Longrightarrow & f \text{ es convexa en } [\sqrt{2}, \infty).
\end{array}$$

Segunda forma (usar propiedades de la función cuadrática):
Tenemos que R es un polinomio cuadrático con coeficiente líder (es decir, coeficiente de "x^2") igual a $1 > 0$, por lo que solo es negativo entre sus raíces. Así, R es positivo en los intervalos $(-\infty, -\sqrt{2})$ y $(\sqrt{2}, \infty)$, y negativo en el intervalo $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Como el dominio de f es $(0, \infty)$, solo nos interesa el caso en que $x > 0$. En este caso, obtenemos que $R(x)$ es positivo si $x \in (\sqrt{2}, \infty)$, y que es negativo si $x \in (0, \sqrt{2})$. Como los signos de R y de f'' coinciden, concluimos que $f''(x)$ es positiva si $x \in (\sqrt{2}, \infty)$, y que es negativa si $x \in (0, \sqrt{2})$.
Tercera forma (resolver la desigualdad directamente):
Tenemos que, si $x > 0$,

$$\begin{aligned} R(x) > 0 &\iff x^2 - 2 > 0 \\ &\iff x^2 > 2 \\ &\iff x > \sqrt{2}. && \text{(Porque } x > 0\text{)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, R es negativo en el intervalo $(0, \sqrt{2})$, y positivo en el intervalo $(\sqrt{2}, \infty)$. Lo mismo es válido para f''.

Esto se resume en la siguiente tabla de convexidad:

	0 — $\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$ — ∞
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\frown$	$\smile$

Tabla 2: Tabla de convexidad de f.

(0,3 pts. por encontrar el signo de f'' en cada intervalo y describir la convexidad de f).

P2. Para $\alpha, \beta > 0$, considere la función $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{x} & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \dfrac{1 - \cos(\beta x)}{x^2} & x > 0. \end{cases}$$

Suponga además que f es continua en $\bar{x} = 0$.

a) (3,0 pts.) Demuestre que $\alpha = 1$ y $\beta = \sqrt{2}$.

Solución: Como f es continua en $\bar{x} = 0$, sus límites laterales hacia 0^- y 0^+ deben coincidir entre sí, y deben coincidir con $f(0)$. Esto es, tenemos que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0).$$

Como $f(0) = 1$, concluimos que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1. \tag{$*$}$$

(0,5 pts. por usar la definición de continuidad para encontrar que los límites laterales deben valer 1).
Por definición de límites laterales, tenemos que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{x}$$

y que
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(\beta x)}{x^2}.$$
Calcularemos ahora estos límites.

Primera forma para calcular los límites (usando la regla de l'Hôpital):
Por un lado,
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{x} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{(\operatorname{sen}(\alpha x))'}{(x)'} && \text{(Regla de l'Hôpital (forma 0/0) – } \textbf{(0,3 pts.)}\text{)}\\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{\alpha\cos(\alpha x)}{1} && \text{((sen}(\alpha x))' = \alpha\cos(\alpha x) \text{ y } (x)' = 1 \text{ – } \textbf{(0,4 pts.)}\text{)}\\
&= \alpha\cos(\alpha\cdot 0) && \text{(Continuidad – } \textbf{(0,2 pts.)}\text{)}\\
&= \alpha, && \text{(}\cos(0) = 1 \text{ – } \textbf{(0,2 pts.)}\text{)}
\end{aligned}$$
y, por otro lado,
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(\beta x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\cos(\beta x))'}{(x^2)'} && \text{(Regla de l'Hôpital (forma 0/0) – } \textbf{(0,15 pts.)}\text{)}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\beta\operatorname{sen}(\beta x)}{2x} && \text{((}1-\cos(\beta x))' = \beta\operatorname{sen}(\beta x) \text{ y } (x^2)' = 2x \text{ – } \textbf{(0,2 pts.)}\text{)}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\beta\operatorname{sen}(\beta x))'}{(2x)'} && \text{(Regla de l'Hôpital (forma 0/0) – } \textbf{(0,15 pts.)}\text{)}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\beta^2\cos(\beta x)}{2} && \text{((}\beta\operatorname{sen}(\beta x))' = \beta^2\cos(\beta x) \text{ y } (2x)' = 2 \text{ – } \textbf{(0,2 pts.)}\text{)}\\
&= \frac{\beta^2\cos(\beta\cdot 0)}{2}. && \text{(Continuidad – } \textbf{(0,2 pts.)}\text{)}\\
&= \frac{\beta^2}{2}. && \text{(}\cos(0) = 1 \text{ – } \textbf{(0,2 pts.)}\text{)}
\end{aligned}$$

Segunda forma para calcular los límites (usando límites conocidos):
Por un lado,
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{x} &= \alpha \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{\alpha x} && \text{(Multiplicar y dividir por } \alpha \text{ – } \textbf{(0,5 pts.)}\text{)}\\
&= \alpha \lim_{u\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} && \text{(Cambio de variable } u = \alpha x \text{ – } \textbf{(0,3 pts.)}\text{)}\\
&= \alpha, && \text{(Límite conocido } \lim_{u\to 0^-} \tfrac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 1 \text{ – } \textbf{(0,3 pts.)}\text{)}
\end{aligned}$$
y, por otro lado,
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(\beta x)}{x^2} &= \beta^2 \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(\beta x)}{(\beta x)^2} && \text{(Multiplicar y dividir por } \beta^2 \text{ – } \textbf{(0,5 pts.)}\text{)}\\
&= \beta^2 \lim_{u\to 0^+} \frac{1-\cos(u)}{u^2} && \text{(Cambio de variable } u = \beta x \text{ – } \textbf{(0,3 pts.)}\text{)}\\
&= \frac{\beta^2}{2}. && \text{(Límite conocido } \lim_{u\to 0^+} \tfrac{1-\cos(u)}{u^2} = \tfrac{1}{2} \text{ – } \textbf{(0,3 pts.)}\text{)}
\end{aligned}$$

Juntando estos cálculos con ($*$), vemos entonces que

$$\alpha = \frac{\beta^2}{2} = 1,$$

de donde $\alpha = 1$ y $\beta = \sqrt{2}$ (porque $\beta > 0$) **(0,3 pts. por concluir)**.

b) (3,0 pts.) Usando la parte anterior, demuestre que f es derivable en $\bar{x} = 0$.

Solución:
Como f está definida por trozos, hay que calcular la derivada por definición. Demostraremos entonces que el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

existe mediante el cálculo de ambos límites laterales. Esto es, debemos calcular

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} - 1}{h},$$

y también calcular

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1-\cos(\sqrt{2}h)}{h^2} - 1}{h}$$

para comprobar que ambos existen y coinciden **(1,0 pto. por escribir la definición de derivada y los límites que se deben calcular)**.
Calcularemos ahora estos límites.

Primera forma para calcular los límites (reordenar antes de usar l'Hôpital):

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} - 1}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(h) - h}{h^2} && \text{(Reordernar – } \textbf{(0,2 pts.)}\text{)}\\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{(\operatorname{sen}(h) - h)'}{(h^2)'} && \text{(Regla de l'Hôpital (forma 0/0) – } \textbf{(0,15 pts.)}\text{)}\\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{\cos(h) - 1}{2h} && ((\operatorname{sen}(h) - h)' = \cos(h) - 1 \text{ y } (h^2)' = 2h \text{ – } \textbf{(0,1 pts.)})\\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{(\cos(h) - 1)'}{(2h)'} && \text{(Regla de l'Hôpital (forma 0/0) – } \textbf{(0,15 pts.)}\text{)}\\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{-\operatorname{sen}(h)}{2} && ((\cos(h) - 1)' = -\operatorname{sen}(h) \text{ y } (2h)' = 2 \text{ – } \textbf{(0,1 pts.)})\\
&= \frac{-\operatorname{sen}(0)}{2} && \text{(Continuidad – } \textbf{(0,1 pts.)}\text{)}\\
&= 0. && (\operatorname{sen}(0) = 0 \text{ – } \textbf{(0,1 pts.)})
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1-\cos(\sqrt{2}h)}{h^2} - 1}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1 - \cos(\sqrt{2}h) - h^2}{h^3} && \text{(Reordernar – } \textbf{(0,1 pts.)}\text{)}\\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{(1 - \cos(\sqrt{2}h) - h^2)'}{(h^3)'} && \text{(Regla de l'Hôpital (forma 0/0) – } \textbf{(0,1 pts.)}\text{)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}h) - 2h}{3h^2} \\
&\qquad ((1-\cos(\sqrt{2}h)-h^2)' = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}h) - 2h \text{ y } (h^3)' = 3h^2 - \textbf{(0,1 pts.)}) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{(\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}h) - 2h)'}{(3h^2)'} \qquad \text{(Regla de l'Hôpital (forma 0/0) – } \textbf{(0,1 pts.)}) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{2\cos(\sqrt{2}h) - 2}{6h} \\
&\qquad ((\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}h) - 2h)' = 2\cos(\sqrt{2}h) - 2 \text{ y } (3h^2)' = 6h - \textbf{(0,1 pts.)}) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{(2\cos(\sqrt{2}h) - 2)'}{(6h)'} \qquad \text{(Regla de l'Hôpital (forma 0/0) – } \textbf{(0,1 pts.)}) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{-2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}h)}{6} \\
&\qquad ((2\cos(\sqrt{2}h) - 2)' = -2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}h) \text{ y } (6h)' = 6 - \textbf{(0,1 pts.)}) \\
&= \frac{-2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}\cdot 0)}{6} \qquad \text{(Continuidad – } \textbf{(0,1 pts.)}) \\
&= 0. \qquad (\mathrm{sen}(0) = 0 - \textbf{(0,1 pts.)})
\end{aligned}
$$

Segunda forma para calcular los límites (usar l'Hôpital y después reordenar):

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{\mathrm{sen}(h)}{h} - 1}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\left(\frac{\mathrm{sen}(h)}{h} - 1\right)'}{(h)'} \qquad \text{(Regla de l'Hôpital (forma 0/0) – } \textbf{(0,1 pts.)}) \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{h\cos(h)-\mathrm{sen}(h)}{h^2}}{1} \qquad (\left(\frac{\mathrm{sen}(h)}{h} - 1\right)' = \frac{h\cos(h)-\mathrm{sen}(h)}{h^2} \text{ y } (h)' = 1 - \textbf{(0,2 pts.)}) \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{h\cos(h) - \mathrm{sen}(h)}{h^2} \qquad \text{(Simplificar – } \textbf{(0,1 pts.)}) \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{(h\cos(h) - \mathrm{sen}(h))'}{(h^2)'} \qquad \text{(Regla de l'Hôpital (forma 0/0) – } \textbf{(0,1 pts.)}) \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h\,\mathrm{sen}(h)}{2h} \qquad ((h\cos(h) - \mathrm{sen}(h))' = -h\,\mathrm{sen}(h) \text{ y } (h^2)' = 2h - \textbf{(0,1 pts.)}) \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{-\mathrm{sen}(h)}{2} \qquad \text{(Simplificar – } \textbf{(0,1 pts.)}) \\
&= \frac{-\mathrm{sen}(0)}{2} \qquad \text{(Continuidad – } \textbf{(0,1 pts.)}) \\
&= 0. \qquad (\mathrm{sen}(0) = 0 - \textbf{(0,1 pts.)})
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1-\cos(\sqrt{2}h)}{h^2} - 1}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\left(\frac{1-\cos(\sqrt{2}h)}{h^2} - 1\right)'}{(h)'} \qquad \text{(Regla de l'Hôpital (forma 0/0) – } \textbf{(0,1 pts.)}) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{\sqrt{2}h\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}h)+2\cos(\sqrt{2}h)-2}{h^3}}{1} \\
&\qquad (\left(\frac{1-\cos(\sqrt{2}h)}{h^2} - 1\right)' = \frac{\sqrt{2}h\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}h)+2\cos(\sqrt{2}h)-2}{h^3} \text{ y } (h)' = 1 - \textbf{(0,1 pts.)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{2}h \operatorname{sen}(\sqrt{2}h) + 2\cos(\sqrt{2}h) - 2}{h^3} && \text{(Simplificar – }\textbf{(0,05 pts.)}\text{)}\\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{(\sqrt{2}h \operatorname{sen}(\sqrt{2}h) + 2\cos(\sqrt{2}h) - 2)'}{(h^3)'}\\
& && \text{(Regla de l'Hôpital (forma 0/0) – }\textbf{(0,1 pts.)}\text{)}\\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{2h\cos(\sqrt{2}h) - \sqrt{2}\operatorname{sen}(\sqrt{2}h)}{3h^2}\\
& (\sqrt{2}h \operatorname{sen}(\sqrt{2}h) + 2\cos(\sqrt{2}h) - 2)' = 2h\cos(\sqrt{2}h) - \sqrt{2}\operatorname{sen}(\sqrt{2}h) \text{ y } (h^3)' = 3h^2 && \text{– }\textbf{(0,1 pts.)}\text{)}\\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{(2h\cos(\sqrt{2}h) - \sqrt{2}\operatorname{sen}(\sqrt{2}h))'}{(3h^2)'}\\
& && \text{(Regla de l'Hôpital (forma 0/0) – }\textbf{(0,1 pts.)}\text{)}\\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{-2\sqrt{2}h\operatorname{sen}(\sqrt{2}h)}{6h}\\
& ((2h\cos(\sqrt{2}h) - \sqrt{2}\operatorname{sen}(\sqrt{2}h))' = -2\sqrt{2}h\operatorname{sen}(\sqrt{2}h) \text{ y } (3h^2)' = 6h && \text{– }\textbf{(0,1 pts.)}\text{)}\\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{-2\sqrt{2}\operatorname{sen}(\sqrt{2}h)}{6} && \text{(Simplificar – }\textbf{(0,05 pts.)}\text{)}\\
&= \frac{-2\sqrt{2}\operatorname{sen}(\sqrt{2}\cdot 0)}{6} && \text{(Continuidad – }\textbf{(0,1 pts.)}\text{)}\\
&= 0. && \text{(sen(0) = 0 – }\textbf{(0,1 pts.)}\text{)}
\end{aligned}
$$

De este modo, vemos que los límites laterales coinciden y valen 0, por lo que

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0.$$

(0,2 pts. por concluir)

Indicación: Recuerde que puede usar la regla de l'Hôpital para calcular límites si le es útil.

P3. a) (3,0 pts.) Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua y tal que $f(0) = f(1)$. Pruebe que existe un punto $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tal que $f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right)$.

Solución: Como queremos encontrar una solución para la ecuación $f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right)$, consideremos la función $h\colon \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{2}\right)$ y veamos que tiene un cero $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ **(0,5 pts. por definir apropiadamente la función)**.
Notemos que

$$
\begin{aligned}
h\left(\frac{1}{2}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) && \text{(Definición de } h \text{ – }\textbf{(0,3 pts.)}\text{)}\\
&= f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) && (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 \text{ – }\textbf{(0,1 pts.)}\text{)}\\
&= f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) && (f(0) = f(1) \text{ – }\textbf{(0,3 pts.)}\text{)}\\
&= -\left(f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right) && \text{(Reordenar – }\textbf{(0,1 pts.)}\text{)}\\
&= -\left(f(0) - f\left(0 + \frac{1}{2}\right)\right) && (0 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \text{ – }\textbf{(0,1 pts.)}\text{)}\\
&= -h(0). && \text{(Definición de } h \text{ – }\textbf{(0,3 pts.)}\text{)}
\end{aligned}
$$

Vemos así que $h(0)h\left(\frac{1}{2}\right) = -\left[h(0)\right]^2 \leq 0$ **(0,3 pts. por comprobar la hipótesis del teorema)**. Por el Teorema de los valores intermedios (TVI), concluimos que existe $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tal que $h(c) = 0$ **(0,5 pts. por escribir correctamente la conclusión del teorema)**. Por definición de h, esto es equivalente a que $f(c) - f\left(c + \frac{1}{2}\right) = 0$, que es lo mismo que $f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right)$ **(0,5 pts. por concluir)**.

b) (3,0 pts.) Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en todo su dominio. Suponga que $g(0) = f(0)$ y que $g'(x) \geq f'(x)$ para todo $x \geq 0$. Muestre que $g(x) \geq f(x)$ para todo $x \geq 0$.

Solución: Consideremos la función $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = g(x) - f(x)$ **(0,5 pts. por definir apropiadamente la función)**. Como $g(0) = f(0)$, sigue que $h(0) = g(0) - f(0) = 0$ **(0,5 pts. por verificar que $h(0) = 0$)**.

Por otro lado,

$$h'(x) = g'(x) - f'(x) \geq 0,$$

ya que $g'(x) \geq f'(x)$ para todo $x \geq 0$ por hipótesis **(0,5 pts. por verificar que $h'(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$)**.

Así, la derivada de h es positiva en el intervalo $[0, \infty)$, por lo que h es creciente en este intervalo **(0,5 pts. por obtener que h es creciente)**. Concluimos de esta forma que $h(x) \geq h(0)$ para todo $x \geq 0$. Como $h(0) = 0$, resulta entonces que $h(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$ **(0,5 pts. por mostrar que h siempre es no negativa)**. Por definición de h, esto es equivalente a que $g(x) - f(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$, que es lo mismo que $g(x) \geq f(x)$ para todo $x \geq 0$ **(0,5 pts. por concluir)**.

Duración: 3h.