Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Cálculo Diferencial e Integral MA1002-2023-1

Control 1

P1. Sea $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x + \frac{6x}{1+x^2} - 2\arctan(x).$$

a) (1,5 pts.) Argumente que f es derivable en todo su dominio. Calcule f'.
Indicación: Recuerde que $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

b) (1,5 pts.) Encuentre los intervalos de crecimiento y los puntos críticos de f (es decir, los puntos donde f' se anula). Decida si estos puntos son máximos o mínimos.
Indicación: No se permite usar criterios con derivadas de orden superior.

c) (1,5 pts.) Argumente que f' es derivable en todo su dominio. Calcule f''.

d) (1,5 pts.) Encuentre los intervalos de convexidad de f.

P2. Para $\alpha, \beta > 0$, considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{x} & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \dfrac{1-\cos(\beta x)}{x^2} & x > 0. \end{cases}$$

Suponga además que f es continua en $\bar{x} = 0$.

a) (3,0 pts.) Demuestre que $\alpha = 1$ y $\beta = \sqrt{2}$.

b) (3,0 pts.) Usando la parte anterior, demuestre que f es derivable en $\bar{x} = 0$.

Indicación: Recuerde que puede usar la regla de l'Hôpital para calcular límites si le es útil.

P3. a) (3,0 pts.) Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua y tal que $f(0) = f(1)$. Pruebe que existe un punto $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tal que $f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right)$.

b) (3,0 pts.) Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en todo su dominio. Suponga que $g(0) = f(0)$ y que $g'(x) \geq f'(x)$ para todo $x \geq 0$. Muestre que $g(x) \geq f(x)$ para todo $x \geq 0$.

Duración: 3h.