Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1002: Cálculo Diferencial e Integral 2022-2

Pauta de corrección Control Recuperativo

P1. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la ley: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0. \end{cases}$

a) **(1 pt.)** Encuentre α de modo que f sea continua en $\bar{x} = 0$. Demuestre además que f es continua en $\bar{x}$, $\forall \bar{x} \neq 0$.

Solución: Para que f sea continua en 0 se requiere:

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$ 0.5

Para $\bar{x} \neq 0$, f es continua por composición, resta y cuociente de funciones continuas. 0.5

b) **(2 pts.)** Calcule $f'(0)$ y $f'(x)$, $x \neq 0$. Concluya que f es estrictamente creciente.

Solución: En $\bar{x} = 0$ se tiene que:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} - \frac{1}{2}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{1+x+x^2}-(2+x)}{2x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{4+4x+4x^2-(4+4x+x^2)}{2x^2\left(2\sqrt{1+x+x^2}+(2+x)\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{3}{2\left(2\sqrt{1+x+x^2}+(2+x)\right)} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$ 0.5

Para $x \neq 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)' x - \left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)}{x^2} \\ &= \frac{\frac{x+2x^2}{2\sqrt{1+x+x^2}} - \left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)}{x^2} \\ &= \frac{-x-2+2\sqrt{1+x+x^2}}{2\sqrt{1+x+x^2}\,x^2} = \frac{2\sqrt{1+x+x^2}-(x+2)}{2x^2\sqrt{1+x+x^2}} \end{aligned}$$ 0.5

Claramente, si $(x+2) < 0$ se tiene que $f'(x) > 0$. Además, si $(x+2) \geq 0$, se tiene que 0.2

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{4+4x+4x^2} - \sqrt{x^2+4x+4}}{2x^2\sqrt{1+x+x^2}} \\ &= \frac{3x^2}{2x^2\sqrt{1+x+x^2}\left(2\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{x^2+4x+4}\right)} > 0. \end{aligned}$$ 0.3

Luego, f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. 0.5

c) (1 pt.) Encuentre ceros y signos de f.

Solución: Ceros:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} = 0 \quad \wedge \quad x \neq 0 \\ &\iff x(x+1) = 0 \quad \wedge \quad x \neq 0 \\ &\iff x = -1. \end{aligned}$$ 0.5

Como f es estrictamente creciente, $f(x) > 0$ para $x > -1$ y $f(x) < 0$ para $x < -1$. 0.5

d) (1 pt.) Determine asíntotas de todo tipo de f.

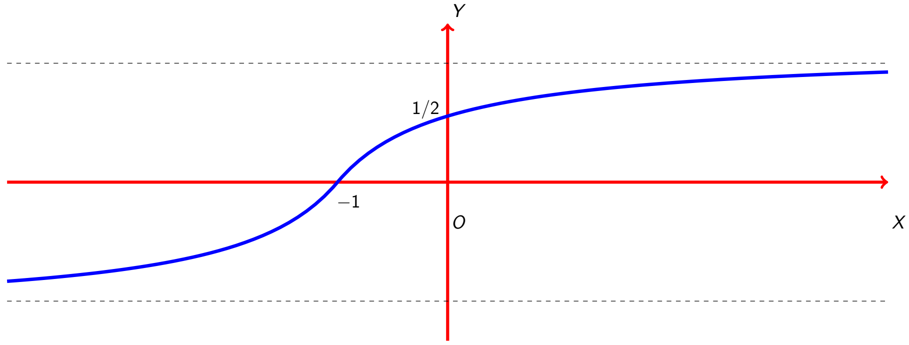
Solución: f no tiene asíntotas verticales por ser continua. Además: 0.5

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \to +\infty \\ -1 & \text{si } x \to -\infty \end{cases} \end{aligned}$$ 0.5

e) (1 pt.) Bosqueje el gráfico de f e indique $\mathrm{Im}(f)$.

Solución:

Gráfico:



0.5

$\mathrm{Im}(f) = (-1, 1)$. 0.5

P2. a) **(3 pts.)** Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función creciente, continua en $[0, \infty)$ y derivable en $(0, \infty)$ con $f(0) = 0$.

Demuestre que la función $F(x) = \displaystyle\int_0^x f^2(t)dt$ es creciente y convexa en $[0, \infty)$.

Solución: Derivando se tiene que:

$$F'(x) = f^2(x), \qquad F''(x) = 2f(x)f'(x)$$ 1.0 0.5

Claramente $F'(x) \geq 0$ por lo que F es creciente en $[0, \infty)$. 0.5

Además, como $f(0) = 0$ y f creciente, se tiene que $f(x) \geq 0$ y $f'(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$. 0.5

Por lo tanto $F''(x) \geq 0$, de donde se deduce que F es convexa en $[0, \infty)$. 0.5

b) **(3 pts.)** Para f, g continuas, se define

$$L_{f,g} = f(x)\left[\int \frac{1}{f^2(x)} \exp\left(-\int_{-1}^x g(t)dt\right) dx\right]$$

Calcule $L_{f,g}$ para $f(x) = x + 1$ y $g(x) = \dfrac{2x+2}{-2-2x-x^2}$.

OBS: Su respuesta no debe incluir el signo integral.

Solución:

$$\begin{aligned}
L_{f,g} &= f(x)\left[\int \frac{1}{f^2(x)} \exp\left(-\int_{-1}^x \frac{2t+2}{-2-2t-t^2}dt\right) dx\right] \\
&= f(x)\left[\int \frac{1}{f^2(x)} \exp\left(\ln(2+2t+t^2)\Big|_{-1}^x\right) dx\right] \\
&= f(x)\left[\int \frac{1}{(x+1)^2}(2+2x+x^2)dx\right] && 1.5 \\
&= f(x)\left[\int \left(\frac{1}{(x+1)^2} + 1\right) dx\right] \\
&= f(x)\left[x - \frac{1}{1+x} + C\right] \\
&= x(x+1) - 1 + C(x+1). && 1.5
\end{aligned}$$

P3. a) **(3 pts.)** Demostrar que

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{sen} x} dx.$$

Solución:

sea $u = \operatorname{arctg}(x)$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{tg}(u) \\ dx &= \sec^2(u)du \\ x = 0 &\longleftrightarrow u = 0 \\ x = 1 &\longleftrightarrow u = \pi/4 \end{aligned}$$

1.0

Así:

$$I := \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{u}{\operatorname{tg} u} \sec^2(u)du = \int_0^{\pi/4} \frac{u}{\operatorname{sen} u \cos u} du. = \int_0^{\pi/4} \frac{2u}{\operatorname{sen}(2u)} du.$$

0.5

Ahora hacemos: $v = 2u$. Con esto Se tiene que:

$$\begin{aligned} dv &= 2du \\ u = 0 &\longleftrightarrow v = 0 \\ u = \pi/4 &\longleftrightarrow v = \pi/2 \end{aligned}$$

1.0

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{v}{\operatorname{sen} v} \frac{dv}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{sen} x} dx.$$

0.5

b) **(3 pts.)** Sean f, g dos funciones derivables en $\mathbb{R}$ tales que: $f'(x) = \alpha f(x)$ y $g'(x) = g(x)$. Demuestre que

$$\int f(x)g(x)(1+\alpha)^n dx = f(x)g(x)(1+\alpha)^{n-1} + C$$

Solución: Derivando se tiene que:

$$\begin{aligned} (RHS)' &= f'(x)g(x)(1+\alpha)^{n-1} + f(x)g'(x)(1+\alpha)^{n-1} && 1.0 \\ &= \alpha f(x)g(x)(1+\alpha)^{n-1} + f(x)g(x)(1+\alpha)^{n-1} && 1.0 \\ &= f(x)g(x)(1+\alpha)^{n-1}(\alpha+1) \\ &= f(x)g(x)(1+\alpha)^n && 1.0 \end{aligned}$$