Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1002: Cálculo Diferencial e Integral 2022-2

Control Recuperativo

P1. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la ley:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a) **(1 pt.)** Encuentre α de modo que f sea continua en $\bar{x} = 0$. Demuestre además que f es continua en $\bar{x}$, $\forall \bar{x} \neq 0$.

b) **(2 pts.)** Calcule $f'(0)$ y $f'(x)$, $x \neq 0$. Concluya que f es estrictamente creciente.

c) **(1 pt.)** Encuentre ceros y signos de f.

d) **(1 pt.)** Determine asíntotas de todo tipo de f.

e) **(1 pt.)** Bosqueje el gráfico de f e indique $\text{Im}(f)$.

P2. a) **(3 pts.)** Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función creciente, continua en $[0, \infty)$ y derivable en $(0, \infty)$ con $f(0) = 0$.

Demuestre que la función $F(x) = \displaystyle\int_0^x f^2(t)dt$ es creciente y convexa en $[0, \infty)$.

b) **(3 pts.)** Para f, g continuas, se define

$$L_{f,g} = f(x)\left[\int \frac{1}{f^2(x)} \exp\left(-\int_{-1}^{x} g(t)dt\right) dx\right]$$

Calcule $L_{f,g}$ para $f(x) = x + 1$ y $g(x) = \dfrac{2x+2}{-2-2x-x^2}$.

OBS: Su respuesta no debe incluir el signo integral.

P3. a) **(3 pts.)** Demostrar que

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{sen} x} dx.$$

b) **(3 pts.)** Sean f, g dos funciones derivables en $\mathbb{R}$ tales que: $f'(x) = \alpha f(x)$ y $g'(x) = g(x)$. Demuestre que

$$\int f(x)g(x)(1+\alpha)^n dx = f(x)g(x)(1+\alpha)^{n-1} + C$$

Tiempo: 3:00 horas.