Pauta de corrección Control 3

P1. Sea $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x\sqrt{2-x}$.
Considere la región $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,2], 0 \le y \le f(x)\}$

a) **(2 pts.)** Calcule el área de la región R.

Solución:

$$A = \int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx; \qquad \begin{array}{ll} u^2 & = 2-x \\ 2udu & = -dx \\ x=0 & \to u=\sqrt{2} \\ x=2 & \to u=0 \end{array}$$ 0.5

$$= \int_{\sqrt{2}}^0 (2-u^2)u2u(-du) = \int_0^{\sqrt{2}} (4u^2-2u^4)du = \frac{4}{3}\cdot 2\sqrt{2} - \frac{2}{5}\cdot 4\sqrt{2} = \frac{16}{15}\sqrt{2}$$ 0.5 1.0

b) **(2 pts.)** Calcule V_{OX}, volumen del sólido engendrado por la rotación de R en torno al eje OX.

Solución:

$$V_{OX} = \int_0^2 \pi x^2(2-x)dx = \pi\int_0^2 (2x^2-x^3)dx = \pi\left(\frac{16}{3} - \frac{16}{4}\right) = \frac{4}{3}\pi$$ 0.5 1.5

c) **(2 pts.)** Calcule V_{OY}, volumen del sólido engendrado por la rotación de R en torno al eje OY.

Solución:

$$V_{OY} = \int_0^2 2\pi x^2\sqrt{2-x}\,dx; \qquad \begin{array}{ll} u^2 & = 2-x \\ 2udu & = -dx \\ x=0 & \to u=\sqrt{2} \\ x=2 & \to u=0 \end{array}$$ 0.5

$$= \int_{\sqrt{2}}^0 2\pi(2-u^2)^2u\cdot 2u(-du)$$ 0.5

$$= 4\pi\int_0^{\sqrt{2}} (4u^2-4u^4+u^6)du = 4\pi\left(\frac{8}{3}\sqrt{2} - \frac{16}{5}\sqrt{2} + \frac{8}{7}\sqrt{2}\right)$$ 1.0

$$= \frac{256}{105}\pi\sqrt{2}$$

P2. Estudie la convergencia de las siguientes integrales impropias

a) **(1.5 pts.)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1+x}{1+x^2}dx.$

Solución: La integral diverge igual que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ ya que 0.5

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1+x}{1+x^2}}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+x^2}{1+x^2} = 1 \neq 0.$$ 1.0

b) **(1.5 pts.)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx.$

Solución: La integral converge igual que $\displaystyle\int_{1^+}^2 \frac{dx}{(x-1)^{1/2}}$ ya que 0.5

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}}{\frac{1}{(x-1)^{1/2}}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0.$$ 1.0

c) **(3 pts.)** $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}dx.$

Solución: Es una integral de "tercera especie", igual a la suma de $I_1 + I_2$, donde

$$I_1 = \int_{2^+}^3 \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}dx, \qquad I_2 = \int_3^\infty \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}dx$$

La integral I_1 converge igual que $\displaystyle\int_{2^+}^3 \frac{dx}{(x-2)^{1/2}}$ ya que 0.5

$$\lim_{x\to 2+} \frac{\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}}{\frac{1}{(x-2)^{1/2}}} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{4} \neq 0.$$ 1.0

La integral I_2 también converge igual que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ ya que 0.5

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}}{1/x^{3/2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{3/2}\sqrt{x-2}}{x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1-2/x}}{1-4/x^2} = 1 \neq 0.$$ 1.0

P3. Considere la región R comprendida entre la curva $y = \ln x$, la recta $y = x/e$, con $x \in (0, e]$.

a) **(2 pts.)** Demuestre que el área de la región R es finita y calcúlela.

Solución:

$$\begin{aligned} A &= \int_{0^+}^{e} \left(\frac{x}{e} - \ln x\right) dx \\ &= \lim_{x\to 0^+} \int_{x}^{e} \left(\frac{t}{e} - \ln t\right) dt \\ &= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{e^2 - x^2}{2e} - e + x\ln x + (e - x)\right) = \frac{e}{2} \end{aligned}$$

0.5
0.5
1.0

b) **(2 pts.)** Calcule, si existe, el volumen del sólido engendrado por la rotación de la región R en torno al eje OY.

Solución:

$$\begin{aligned} V_{OY} &= \int_{0^+}^{e} 2\pi x \left(\frac{x}{e} - \ln x\right) dx \\ &= 2\pi \lim_{x\to 0^+} \int_{x}^{e} \left(\frac{t^2}{e} - t\ln t\right) dt; \qquad \int t\ln t = \frac{t^2}{2}\ln t - \int \frac{t\,dt}{2} = \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4} + C \\ &= 2\pi \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{e^3 - x^3}{3e} - \frac{e^2}{2} + \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{e^2 - x^2}{4}\right) = \frac{1}{6}\pi e^2. \end{aligned}$$

0.5
0.5
0.5
0.5

c) **(2 pts.)** Demuestre que la superficie S_{OY} del manto del sólido de revolución de (b) tiene área finita y es acotada por $3\pi e\sqrt{1 + e^2}$.

Obs: Note que S_{OY} está formada por la zona externa (logarítmica) y las zona interna (cóno formado por la recta)

Solución:

$$S_{OY} = \int_{0^+}^{e} 2\pi x\sqrt{1 + f_1'^2(x)}dx + \int_{0^+}^{e} 2\pi x\sqrt{1 + f_2'^2(x)}dx,$$

donde

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{x}{e}, \quad f_1'(x) = \frac{1}{e}, \qquad 1 + f_1'^2(x) = 1 + \frac{1}{e^2} = \frac{e^2+1}{e^2} \\ f_2(x) &= \ln(x), \quad f_2'(x) = \frac{1}{x}, \qquad 1 + f_2'^2(x) = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}. \end{aligned}$$

1.0

Luego

$$S_{OY} = \int_{0^+}^{e} \frac{2\pi x}{e}\sqrt{e^2+1}dx + \int_{0^+}^{e} \frac{2\pi x}{x}\sqrt{x^2+1}dx$$

Resulta ser una integral propia (luego finita). Además

0.5

$$\begin{aligned} S_{OY} &= \pi e\sqrt{e^2+1} + 2\pi \int_{0}^{e} \sqrt{x^2+1}dx \\ &\le \pi e\sqrt{e^2+1} + 2\pi \int_{0}^{e} \sqrt{\mathbf{e}^2+1}dx = 3\pi e\sqrt{e^2+1}. \end{aligned}$$

0.5