Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1002: Cálculo Diferencial e Integral 2022-2

Pauta de corrección Control 2

P1. a) Calcule

i) **(2 pts.)** $\int e^{-\sqrt{x}}dx$. ii) **(2 pts.)** $\int_1^2 x^3\ln(1/x)dx$.

Solución: Para i), usamos $u=\sqrt{x}$, con $2udu=dx$. Queda

$$I = \int 2ue^{-u}du; \quad \text{Se puede omitir el } du \qquad \boxed{1.0}$$

$$\text{PP}: \left|\begin{array}{lll} F &= 2u & F'(x) = 2 \\ G' &= e^{-u} & G(x) = -e^{-u}\end{array}\right. \quad = -2ue^{-u} + 2\int e^{-u}du = -2ue^{-u} - 2e^{-u} + C^{*} \qquad \boxed{0.5}$$

$$= -2\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}} + C^{**} \qquad \boxed{0.5}$$

(Descontar 0.2 en (*) y 0.3 en (**) si falta C cuando desaparece el símbolo $\int$)

En ii) integramos por partes. Tenemos que:

$$I = \int_1^2 x^3\ln(1/x)dx; \qquad \text{PP}: \left|\begin{array}{lll} F &= -\ln(x) & F'(x) = -1/x \\ G' &= x^3 & G(x) = \frac{x^4}{4}\end{array}\right.$$

$$= \left(\frac{x^4}{4}\ln(x)\right)\Big|_2^1 + \int_1^2 \frac{x^3}{4} \quad \text{Se puede usar el "-" para invertir los límites} \qquad \boxed{1.0}$$

$$= -4\ln(2) + \frac{x^4}{16}\Big|_1^2$$

$$= -4\ln(2) + \frac{16-1}{16} = \frac{15}{16} - 4\ln(2). \qquad \boxed{1.0}$$

b) **(2 pts.)** Sea $I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n(x)dx$. Demostrar que $\forall n\in\mathbb{N}$ se cumple $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$.

Solución: Integrando por partes se tiene que $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n+1}(x)\operatorname{sen}(x)dx; \qquad \left|\begin{array}{lll} F(x) &= \operatorname{sen}^{n+1}(x) & F'(x) = (n+1)\operatorname{sen}^n(x)\cos(x) \\ G'(x) &= \operatorname{sen}(x) & G(x) = -cos(x)\end{array}\right.$$

$$= cos(x)\operatorname{sen}^{n+1}(x)\Big|_{\pi/2}^{0} + \int_0^{\pi/2}(n+1)\operatorname{sen}^n(x)\cos^2(x)dx \qquad \boxed{1.0}$$

$$= (n+1)\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^n(x)(1-\operatorname{sen}^2(x))dx = (n+1)(I_n - I_{n+2}). \qquad \boxed{0.5}$$

Despejando I_{n+2} queda $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, de donde se obtiene el resultado. $\boxed{0.5}$

P2. a) Indique, justificando brevemente, si las siguientes funciones son o no Riemann Integrables en $[a, b]$, donde $0 < a < b$.

i) **(1 pt.)** $f(x) = \begin{cases} 1/n & \text{si } x \in (s_n, s_{n-1}],\ n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{si } x = a, \end{cases}$ donde (s_n) es una sucesión decreciente tal que $s_0 = b$ y $s_n \to a$.

Solución: Es Riemann Integrable ya que es una función **creciente** (Monótona). 1.0

Obs: Para el crecimiento se pueden usar argumentos gráficos

ii) **(1 pt.)** $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-x} & \text{si } x \in [a, b) \\ 0 & \text{si } x = b. \end{cases}$

Solución: No es Riemann Integrable ya que no es acotada. 1.0

Obs: La asíntota vertical puede indicarse sin demostración.

iii) **(1 pt.)** $h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I} \cap [a, b]. \end{cases}$

Solución: No es Riemann Integrable ya que la Integral inferior es 0 y la superior es $\frac{b^2-a^2}{2}$. 1.0

Obs: Las integrales inferior y superior y su diferencia se pueden obtener por argumentos gráficos.

b) **(3 pts.)** Exprese la sucesión $x_n = \dfrac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$, donde $\alpha > 0$, como una suma de Riemann y encuentre el valor de su límite.

Solución: Claramente:

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{n}.$$ 1.0

Es decir, y_n corresponde a la suma de Riemann asociada a la función $f(x) = x^\alpha$ donde $x \in [0, 1]$. Luego

$$y_n \to \int_0^1 x^\alpha dx.$$ 1.0

$$= \frac{1}{\alpha + 1}.$$ 1.0

P3. **a)** **(3 pts.)** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable con f' continua, que satisface

$$f(x) + \int_1^x t^3 f'(t)dt = \frac{x^4}{4} + x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demuestre que f' es constante en $\mathbb{R}$ y encuentre la fórmula explícita de $f(x)$.

Solución: Derivando se obtiene que:

$$(1 + x^3)f'(x) = x^3 + 1 \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$ 1.0

Luego $\forall\ x \neq -1$ se tiene que $f'(x) = 1$. 0.2

Como f' es continua en $\mathbb{R}$ (y en -1), se deduce que también $f'(-1) = 1$. 0.5

Reemplazando en la ecuación dada, queda

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + x - \int_1^x t^3 dt$$ 0.5

$$= \frac{x^4}{4} + x - \left.\frac{t^4}{4}\right|_1^x = \frac{x^4}{4} + x - \frac{x^4 - 1}{4} = x + \frac{1}{4}.$$ 0.8

b) **(3 pts.)** Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} dt}{x - \displaystyle\int_0^x e^{t^2} dt.}$$

Solución: Claramente el numerador y el denominador tienden a 0. Usamos l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} dt}{x - \displaystyle\int_0^x e^{t^2} dt} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} dt + x\operatorname{sen}(x)}{1 - e^{x^2}};$$ 1.0

Es de la forma $\frac{0}{0}$. L'Hôpital.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2 \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} dt + 3\operatorname{sen}(x) + x\cos(x)}{-2xe^{x^2}};$$ 1.0

Es de la forma $\frac{0}{0}$. L'Hôpital:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + 4\cos(x) - x\operatorname{sen}(x)}{-2e^{x^2} - 4x^2 e^{x^2}} = \frac{2 + 4 + 0}{-2 + 0} = -3.$$ 1.0